I олимпиада (1935)

Первый тур

1-й вариант

З-ча **1**. Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

Реш **1**. Пусть x и y — искомые числа. По условию $\frac{x+y}{2} : \sqrt{xy} = 25 : 24$, т.е. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12}$. Положим $q = \sqrt{x/y}$. Тогда $q + \frac{1}{q} = \frac{25}{12}$, т.е. $q^2 - \frac{25}{12}q + 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим $q_1 = 4/3$ и $q_2 = 3/4$. Таким образом, $x : y = 16 : 9$ или $9 : 16$.

З-ча **2**. Построить треугольник по данным двум сторонам a и b и биссектрисе m угла между ними.

Реш **2**. Пусть ABC — искомый треугольник, CD — его биссектриса. Возьмём на прямой AC точку E так, что $BE \| CD$. Тогда углы при стороне BE треугольника BCE равны, поэтому $EC = CB = a$. Кроме того, $EB : CD = EC : CA$, поэтому $EB = \frac{m(a+b)}{b}$. В треугольнике BCE мы знаем длины всех сторон, поэтому можем его построить. Теперь для построения треугольника ABC достаточно отложить отрезок b на продолжении стороны EC за точку C.

З-ча **3**. Пирамида, все боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом φ, имеет в основании равнобедренный треугольник с углом α, заключенным между равными сторонами. Определить двугранный угол при ребре, соединяющем вершину пирамиды с вершиной угла α.

Реш **3**. Пусть ABC — основание данной пирамиды ($\angle BAC = \alpha$), S — вершина пирамиды. Боковые рёбра наклонены под равными углами, поэтому они равны. Из равенства треугольников ASB и ASC следует, что основания перпендикуляров, опущенных из точек B и C на прямую AS, совпадают. Пусть D — основание этих двух перпендикуляров, E — середина отрезка BC. Тогда угол $\theta = \angle CDB$ искомый. Ясно, что $DE = AE\sin\varphi$ и $EC = AE \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{EC}{DE} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}$.

2-й вариант

З-ча **1**. Железнодорожный поезд проходит мимо наблюдателя в течение t_1 секунд, при той же скорости он проходит через мост длиной в a метров в течение t_2 секунд. Найти длину и скорость поезда.

Реш **2**. Пусть длина поезда равна l м. Чтобы проехать через мост, передний вагон должен въехать на мост, проехать по нему a м, а потом проехать ещё l м, чтобы последний вагон покинул мост. В результате получаем систему уравнений $l = t_1 v,\ \ l + a = t_2 v$. Решая её, находим $l = \frac{t_1 a}{t_2 - t_1}$ м и $v = \frac{a}{t_2 - t_1}$ м/с.

З-ча **2**. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.

Реш **2**. Пусть a, b, c — данные прямые, причём прямая b лежит между a и c. Предположим, что вершины A, B, C квадрата $ABCD$ лежат на прямых a, b, c соответственно.

Первое решение. Из того, что $\angle ABC = 90^\circ$ и $AB = BC$ вытекает следующее построение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и повернём прямую a относительно точки B на 90° (в одну или в другую сторону). Точка C — это точка пересечения прямой c и образа прямой a при указанном повороте.

Второе решение. Возьмём на прямой b произвольную точку B и опустим из неё перпендикуляр BA_1 на прямую a и перпендикуляр BC_1 на прямую c. Прямоугольные треугольники BA_1A и CC_1B имеют равные гипотенузы и равны углы, поэтому они равны. Из этого вытекает следующее построение. На прямой a строим отрезок A_1A, равный отрезку BC_1. Мы построили вершину A. Вершина C строится аналогично.

З-ча **3**. Найти объем правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой a, а плоские углы при вершине равны углам наклона боковых рёбер к плоскости основания.

Реш **3**. Пусть длина бокового ребра равна b, а высота пирамиды равна h. Искомый объём V равен $a^2h/3$. Пусть плоские углы при вершине и углы наклона боковых ребер к плоскости основания равны α. Тогда $b\sin\alpha = h$, $b\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ и $b\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}$. Поэтому $h = b\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)} = a\cos\frac{\alpha}{2}$, а значит, $V = \frac{1}{3}a^3\cos\frac{\alpha}{2}$. Кроме того, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha$. Пусть $\cos\frac{\alpha}{2} = x$ Тогда $\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2x^2-1)$. Решая это уравнение и оставляя только положительный корень, получаем $x = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

3-й вариант

З-ча **1**. Составить две прогрессии: арифметическую и геометрическую, каждую из четырёх членов; при этом, если сложить одноимённые члены обеих прогрессий, то должны получиться числа: 27, 27, 39, 87.

Реш **1**. Пусть $a, a+d, a+2d, a+3d$ — искомая арифметическая прогрессия, b, bq, bq^2, bq^3 — искомая геометрическая прогрессия. По условию

$$\begin{aligned} a+b &= 27,\\ a+d+bq &= 27,\\ a+2d+bq^2 &= 39,\\ a+3d+bq^3 &= 87. \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения первое, из третьего второе, из четвёртого третье:

$$\begin{aligned} d+b(q-1) &= 0,\\ d+bq(q-1) &= 12,\\ d+bq^2(q-1) &= 48. \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем $b(q-1) = -d$; подставим это выражение во второе и третье уравнения:

$$\begin{aligned} d-dq &= 12,\\ d-dq^2 &= 48. \end{aligned}$$

Поделив последнее уравнение на предпоследнее, получим $q = 3$. Следовательно, $d = -6, b = 3$ и $a = 24$. Таким образом, искомые прогрессии — это

$$\begin{array}{cccc} 24, & 18, & 12, & 6;\\ 3, & 9, & 27, & 81. \end{array}$$

З-ча **2**. Доказать: если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

Реш **2**. Пусть $a, a+d, a+2d$ — стороны треугольника, h — высота, опущенная на сторону $a+d$. Площадь треугольника, с одной стороны, равна $\frac{(a+d)h}{2}$, а с другой стороны, она равна произведению половины периметра на радиус вписанного круга: $\frac{a+(a+d)+(a+2d)}{2}r$. Приравнивая эти выражения, получаем $\frac{(a+d)h}{2} = \frac{3(a+d)r}{2}$, т.е. $r = \frac{1}{3}h$.

З-ча **3**. Высота усеченного конуса равна радиусу его большего основания; периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен периметру равностороннего треугольника, вписанного в большее основание. Определить угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

Реш **3**. Пусть R — радиус окружности большего основания, r — радиус окружности меньшего основания. Периметр правильного шестиугольника, описанного около меньшего основания, равен $\frac{12r}{\sqrt{3}}$. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в большее основание, равен $3R\sqrt{3}$. По условию $\frac{12r}{\sqrt{3}} = 3R\sqrt{3}$, т.е. $r = \frac{3}{4}R$. Если φ — искомый угол наклона, то $\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{R-r} = 4$.

4-й вариант

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2-2z^2 &=& 2a^2,\\ x+y+2z &=& 4(a^2+1),\\ z^2-xy &=& a^2. \end{array} \right.$$

Реш **1**. Запишем эти уравнения следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2 &=& 2z^2+2a^2,\\ x+y &=& 4(a^2+1)-2z,\\ -xy &=& a^2-z^2. \end{array} \right.$$

Второе уравнение возведём в квадрат, прибавим к нему третье уравнение, умноженное на 2, и вычтем первое уравнение. В результате получим:

$$0 = 16(a^2+1)^2 - 16(a^2+1)z,$$

т.е. $z = a^2 + 1$. Теперь второе и третье уравнения записываются так:

$$\begin{cases} x + y &= 2(a^2 + 1), \\ xy &= a^4 + a^2 + 1. \end{cases}$$

Решение этой системы сводится к решению квадратного уравнения; решая его, находим

$$x = a^2 \pm a + 1, \quad y = a^2 \mp a + 1.$$

З-ча **2**. В треугольнике ABC из произвольной точки D на стороне AB проведены две прямые, параллельные сторонам AC и BC, пересекающие BC и AC соответственно в точках F и G. Доказать, что сумма длин окружностей, описанных около треугольников ADG и BDF, равна длине окружности, описанной около треугольника ABC.

Реш **2**. Радиусы описанных окружностей подобных треугольников ADG, DBF и ABC пропорциональны соответственным сторонам:

$$\frac{R_1}{AD} = \frac{R_2}{DB} = \frac{R}{AB},$$

поэтому $\frac{R_1+R_2}{AD+DB} = \frac{R}{AB}$, а значит, $R_1 + R_2 = R$. Умножая это равенство на 2π, получаем требуемое.

З-ча **3**. Развертка боковой поверхности конуса представляет сектор с углом в $120°$; в конус вписана треугольная пирамида, углы основания которой составляют арифметическую прогрессию с разностью $15°$. Определить угол наклона к плоскости основания наименьшей из боковых граней.

Реш **3**. Пусть l — длина образующей конуса. Длина окружности основания равна длине дуги развёртки, поэтому радиус окружности основания равен $l/3$. Учитывая, что сумма углов любого треугольника равна $180°$, получаем, что основание пирамиды — треугольник ABC с углами $45°$, $60°$, $75°$. Пусть BC — меньшая сторона, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 2 \cdot 45° = 90°$, поэтому BOC — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $l/3$. Значит, $BC = l\sqrt{2}/3$. Пусть D — середина отрезка BC, S — вершина конуса. Тогда $OD = \frac{l}{3\sqrt{2}}$ и $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{18}} = \frac{l\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$. Если φ — искомый угол, то $\cos\varphi = \frac{OD}{SD} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Второй тур

Серия А

З-ча **1**. Дана окружность и на ней 3 точки M, N, P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

Реш **1**. Сначала по точкам M, N и P построим описанную окружность. Пусть O — её центр. Прямая ON параллельна прямой AM (A — вершина треугольника ABC, из которой проведены медиана, биссектриса и высота). Из этого вытекает следующее построение. Через точку M проводим прямую, параллельную прямой ON. Вершина A — это точка пересечения построенной прямой с описанной окружностью. Чтобы построить остальные вершины, найдём точку пересечения прямых AP и ON; из этой точки восставим перпендикуляр к прямой ON. Он пересекает окружность в искомых точках.

З-ча **2**. На поверхности куба найти точки, из которых диагональ видна под наименьшим углом. Доказать, что из остальных точек поверхности куба диагональ видна под бóльшим углом, чем из найденных.

Реш **2**. Множество точек, из которых диагональ куба видна под углом $90°$, представляет собой описанную сферу куба (концы диагонали исключены). Пересечение этого множества с поверхностью куба состоит из 6 точек, отличных от концов данной диагонали. Все остальные точки поверхности куба лежат строго внутри описанной сферы, поэтому из них диагональ видна под тупым углом.

З-ча **3**. В двух различных плоскостях лежат два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Прямая AB пересекается с прямой A_1B_1, прямая BC — с прямой B_1C_1, прямая CA — с прямой C_1A_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 или все три пересекаются в одной точке, или параллельны друг другу.

Реш **3**. Рассмотрим плоскости ABA_1B_1, BCB_1C_1 и ACA_1C_1. Пересечением первых двух плоскостей служит прямая BB_1. Если третья плоскость пересекает прямую BB_1 в некоторой точке, то эта точка является как точкой пересечения трёх указанных плоскостей, так и точкой пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Действительно, прямые AA_1 и CC_1 являются пересечениями пар плоскостей, поэтому точка пересечения трёх плоскостей им принадлежит. Если же третья плоскость параллельна прямой BB_1, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны друг другу. Действительно, в этом случае пересечения пар плоскостей являются тремя параллельными прямыми.

Серия B

З-ча **1**. Сколько действительных решений имеет система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y &= 2, \\ xy-z^2 &= 1? \end{cases}$$

Реш **1**. Из второго уравнения следует, что $xy \geqslant 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательны, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительны и $x+y \geqslant 2\sqrt{xy} \geqslant 2$, причём равенство $x+y=2$ возможно лишь в том случае, когда $x=y=1$. В таком случае $z=0$.

З-ча **2**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3-y^3 &= 26, \\ x^2y-xy^2 &= 6. \end{cases}$$

Реш **2**. Пусть $y=kx$. Сразу отметим, что $k \neq 1$. Из уравнений

$$\begin{aligned} x^3-k^3x^3 &= 26, \\ kx^3y-k^2x^3 &= 6 \end{aligned}$$

получаем $x^3 = \frac{26}{1-k^3}$ и $x^3 = \frac{6}{k-k^2}$. Следовательно,

$$\frac{26}{1-k^3} = \frac{6}{k-k^2}.$$

Это уравнение можно умножить на $1-k$. В результате получим

$$\frac{26}{1+k+k^2} = \frac{6}{k},$$

откуда $k=3$ или $\frac{1}{3}$. Поэтому $x^3=-1$ или $x^3=27$. В итоге получаем следующие решения: $(-1,-3)$, $\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{3})\right)$, $(3,1)$, $\left(\frac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})\right)$.

З-ча **3**. Найти сумму

$$1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3.$$

Реш **3**. Индукцией по m легко доказать, что $1^3+2^3+3^3+\dots+m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2$. Действительно, база индукции очевидна, поэтому нужно лишь проверить равенство

$$\frac{m^2(m+1)^2}{2} + (m+1)^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{.}$$

После сокращения на $m+1$ и умножения на 4 получаем очевидное равенство $m^2+4(m+1)=(m+2)^2*$

Таким образом, $1^3+2^3+3^3+\dots+(2n-1)^3+(2n)^3 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)$, т.е. $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3+2^3(1^3+2^3+\dots+n^3) = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2$. Преобразуем последнее равенство, воспользовавшись тем, что $1^3+2^3+\dots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. В результате получим $1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Серия C

З-ча **1**. Выбраны 6 различных цветов; требуется раскрасить 6 граней куба, каждую в особый цвет из числа избранных. Сколькими геометрически различными способами можно это сделать? Геометрически различными называются две такие расцветки, которые нельзя совместить одну с другой при помощи вращений куба вокруг его центра.

Решить ту же задачу для случая раскраски граней правильного двенадцатигранника в двенадцать различных цветов.

(*Эта задача не была решена никем из участников олимпиады.*)

Реш **1**. Куб можно повернуть так, чтобы грань, окрашенная первым цветом, заняла заданное положение. Для окраски противоположной ей грани есть 5 различных вариантов; разные раскраски противоположной грани дают геометрически различные раскраски куба.

Среди оставшихся четырёх граней можно выбрать грань, окрашенную данным цветом и перевести её в данное положение (не меняя при этом положение первых двух граней). Разные раскраски трёх оставшихся граней дают геометрически различные раскраски куба. Одну из этих граней можно окрасить тремя способами, одну из оставшихся — двумя. Всего получаем $5\cdot 3\cdot 2 = 30$ геометрически различных раскрасок.

Решим теперь задачу для 12-гранника (додекаэдра). Количество всех возможных раскрасок додекаэдра равно $12! = 1\cdot 2\cdot\dots\cdot 12$. Чтобы найти число геометрически различных раскрасок, нужно поделить $12!$ на число самосовмещений додекаэдра. Любую из 12 граней можно перевести в любую другую. Кроме того, есть 5 поворотов (включая тождественный), сохраняющих данную грань. Всего получается 60 самосовмещений. Поэтому количество геометрически различных раскрасок додекаэдра равно $12!/60 = 7\,983\,360$.

З-ча **2**. Сколькими различными способами можно разложить целое положительное число n на сумму трех положительных целых слагаемых? При этом два разложения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются за различные.

Реш **2**. Ответ: $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Первое решение. Пусть $n = x+y+z$. Число x может быть равно $1, 2, 3, \dots, n-2$. При фиксированном x число y может принимать одно из $n-x-1$ значений. Всего получаем $(n-2)+(n-3)+\dots+1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

Второе решение. Запишем n как сумму единиц: $n = 1+1+\dots+1$. Среди $n-1$ знаков плюс мы должны выбрать два: то, что стоит перед первым по порядку выбранным знаком плюс — это число x, а то, что стоит после второго знака плюс — это число z. Всего получаем $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ вариантов.

З-ча **3**. Будем обозначать через $M(a,b)$ — общее наименьшее кратное двух чисел a и b, $D(a,b)$ — общий наибольший делитель двух чисел a и b.

Доказать формулу

$$M(a,b)\cdot D(a,b) = ab.$$

Для трех чисел доказать формулу

$$\frac{M(a,b,c)\cdot D(a,b)\cdot D(b,c)\cdot D(c,a)}{D(a,b,c)} = abc.$$

Реш **3**. Докажем сначала формулу для двух чисел. Пусть $a = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ и $b = p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}$. Тогда

$$D(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdots p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}},$$
$$M(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdots p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}.$$

Поэтому доказательство можно провести для каждого простого множителя отдельно.

Если $a = p^\alpha$ и $b = p^\beta$, причём $\alpha \leqslant \beta$, то $D(a,b) = p^\alpha$ и $M(a,b) = p^\beta$. Поэтому $M(a,b)\cdot D(a,b) = p^\alpha p^\beta = ab$.

Докажем теперь формулу для трёх чисел. Достаточно рассмотреть случай, когда $a = p^\alpha$, $b = p^\beta$, $c = p^\gamma$, причём $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. В этом случае

$$\frac{M(a,b,c)D(a,b)D(b,c)D(c,a)}{D(a,b,c)} = \frac{p^\gamma p^\alpha p^\beta p^\alpha}{p^\alpha} = abc.$$

II олимпиада (1936)

Второй тур

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y &= a, \\ x^5+y^5 &= b^5. \end{cases}$$

Реш **1**. Пусть $xy=t$. Несложно проверить, что

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5(x+y)^3xy+5(x+y)x^2y^2=a^5-5a^3t+5at^2$$

Для t получаем квадратное уравнение $t^2-a^2t+\frac{a^5-b^5}{5a}=0$. Решая его, находим $t=\frac{1}{2}\left(a^2\pm\sqrt{\frac{a^5+4b^5}{5a}}\right)$. В результате получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y &= a, \\ xy &= t. \end{cases}$$

Решение этой системы тоже сводится к решению квадратного уравнения.

З-ча **2**. На плоскости дан угол, образованный двумя лучами a и b, и некоторая точка M. Провести через точку M прямую c так, чтобы треугольник, образованный прямыми a, b и c, имел периметр данной величины.

Реш **2**. Пусть A, B, C — точки пересечения прямых b и c, c и a, a и b. Рассмотрим вписанную окружность треугольника ABC. Пусть она касается сторон CA и CB в точках K и L. Тогда $CK=CL=p$, где p — полупериметр. Из этого вытекает следующее построение. Построим на сторонах CA и CB угла ACB точки K и L так, что $CK=CL=p$. Затем построим окружность S, касающуюся прямых b и a в точках K и L. Наконец, проведём из точки M касательные к окружности S. Та касательная, для которой окружность S будет вписанной окружностью треугольника ABC, является искомой прямой c.

З-ча **3**. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

Реш **3**. Пусть a и b — катеты данного треугольника, c — его гипотенуза. Тогда $a^2+b^2=c^2$. Легко проверить, что при делении на 3 квадрат целого числа даёт остаток 0 или 1. Поэтому если a^2+b^2 — квадрат целого числа, то одно из чисел a и b делится на 3. То же самое справедливо и для остатков от деления на 4, поэтому одно из чисел a и b делится на 4. Следовательно, ab делится на 12.

З-ча **4**. Сколькими различными способами можно представить 1 000 000 в виде произведения трёх натуральных[1] чисел? Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются тождественными.

(*Эта задача не была решена никем из участников олимпиады.*)

Реш **4**. Пусть множители имеют вид $2^{a_1}5^{b_1}$, $2^{a_2}5^{b_2}$ и $2^{a_3}5^{b_3}$. Тогда $a_1+a_2+a_3=6$ и $b_1+b_2+b_3=6$. При этом числа a_i и b_i могут быть равны нулю. Если $a_1=k$, то для разложения $a_2+a_3=6-k$ получаем $7-k$ вариантов. Поэтому для разложения $a_1+a_2+a_3=6$ получаем $7+6+5+4+3+2+1=28$ вариантов. Всего получаем $(28)^2=784$ способа.

Но пока что мы не учли тождественность разложений, отличающихся лишь порядком множителей. Есть ровно одно разложение, не зависящее от порядка множителей, в котором все множители равны 100. Те разложения, в которых есть два равных множителя, мы посчитали трижды. В каждый из равных множителей 2 может входить в степени $0, 1, 2$ или 3, т.е. всего четырьмя различными способами; столькими же способами может входить 5. Всего получаем 16 разложений такого вида, но одно из них — рассмотренное выше разложение с тремя равными множителями. Остаётся 15 разложений, каждое из которых мы посчитали трижды. Количество разложений с попарно различными множителями равно $784-1-45=738$. Каждое из них мы посчитали 6 раз, поэтому среди них будет $738/6=123$ различных разложения. Всего получаем $1+15+123=139$ разложений.

З-ча **5**. В пространстве расположены 3 плоскости и шар. Сколькими различными способами можно поместить в пространстве второй шар так, чтобы он касался трех данных плоскостей и первого шара? (*В этой задаче речь фактически идёт о касании сфер, т.е. не предполагается, что шары могут касаться только внешним образом — прим. ред.*)

[1] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натруральные числа — прим. ред.

Реш **5**. Ответ: от 0 до 16 (в зависимости от расположения данных плоскостей и шара).

Пусть O и R — центр и радиус данной сферы S. Предположим, что сфера S_1 с центром O_1 касается данной сферы и трёх данных плоскостей. Сопоставим сфере S_1 сферу S_1' с центром O_1 и радиусом O_1O. Сфера S_1' проходит через данную точку O и касается трёх плоскостей, удалённых от данных плоскостей на расстояние R. Для каждой плоскости есть ровно две плоскости, удалённых от неё на расстояние R. Поэтому сфера S_1' проходит через данную точку O и касается тройки плоскостей, причём есть $2^3 = 8$ различных таких троек.

Легко проверить, что существует не более двух сфер, проходящих через данную точку и касающихся трёх данных плоскостей. В случае, когда три данные плоскости пересекаются в одной точке, это доказывается следующим образом. Впишем сферу в тот трёхгранный угол, который образован данными плоскостями и содержит данную точку. Проведём прямую, соединяющую данную точку и точку пересечения данных плоскостей. Искомые сферы соответствуют точкам пересечения этой прямой с данной сферой, а таких точек не более двух. Отдельно рассматривается случай, когда данная точка лежит на одной из данных плоскостей. Кроме того, нужно рассмотреть два более простых случая: 1) есть две параллельные плоскости и их пересекает третья плоскость; 2) прямые пересечения плоскостей параллельны. (Легко видеть, что если все три плоскости параллельны или пересекаются по одной прямой, то сфера не может касаться трёх таких плоскостей.)

В итоге мы получаем, что существует не более 16 сфер S_1'. По сфере S_1' сфера S_1 восстанавливается не однозначно. Чтобы её восстановить, нужно взять точку O', в которой прямая OO_1 пересекает сферу S; сфера S_1 — это сфера с центром O_1 и радиусом O_1O'. Точек пересечения сферы с прямой, проходящей через её центр, две, поэтому мы получаем две сферы. Но лишь одна из них может касаться трёх данных плоскостей (вторая сфера касается других плоскостей). Поэтому существует не более 16 сфер, касающихся данной сферы и трёх данных плоскостей.

Покажем теперь, что при различных расположениях данных плоскостей и данной сферы количество сфер, касающихся их, может быть любым целым числом от 0 до 16. Будем считать, что данные плоскости пересекаются по трём параллельным прямым, причём расстояния между этими прямыми попарно различны. Сферы, касающиеся трёх данных плоскостей, заметают четыре цилиндра, соответствующих вписанной и трём вневписанным окружностям треугольника, который образуется при пересечении данных плоскостей плоскостью, ортогональной всем трём данным плоскостям. Эти цилиндры не имеют общих точек, в том числе и точек касания.

Рассмотрим цилиндр и точку вне его. Рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке. Нас интересуют сферы, вписанные в цилиндр и касающиеся сферы S_R. Если радиус R сферы S_R мал, то таких сфер нет. Будем увеличивать радиус R до тех пор, пока сфера S_R не коснётся цилиндра. В этом случае количество искомых сфер равно 1. Будем снова увеличивать радиус R. Когда сфера S_R пересечёт цилиндр, количество искомых сфер станет равно 2. Затем сфера S_R будет пересекать цилиндр и ещё касаться его в одной точке. В этом случае количество искомых сфер равно 3. Если же радиус R увеличить ещё больше, то количество искомых сфер будет равно 4.

Эти замечания показывают, что если мы выберем точку вне данных четырёх цилиндров и рассмотрим семейство сфер S_R с центром в выбранной точке, то при постепенном увеличении радиуса R мы получим конфигурации, для которых число искомых сфер последовательно изменяется от 0 до 16. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы не появлялись одновременно две точки касания сферы S_R с цилиндрами.

III олимпиада (1937)

Первый тур

З-ча **1**. Решить систему:

$$\begin{cases} x+y+z &= a, \\ x^2+y^2+z^2 &= a^2, \\ x^3+y^3+z^3 &= a^3. \end{cases}$$

Реш **1**. Ответ: $(0,0,a)$, $(0,a,0)$ и $(a,0,0)$.

Тождество $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+xz)$ показывает, что

$$xy+yz+xz=0. \tag{1}$$

Тождество $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$ показывает, что $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Учитывая равенство (1), получаем $3xyz=0$. Если $x=0$, то равенство (1) показывает, что $yz=0$. Поэтому либо $y=0$ и $z=a$, либо $z=0$ и $y=a$. Аналогично разбираются остальные варианты. В итоге получаем следующие решения: $(0,0,a)$, $(0,a,0)$ и $(a,0,0)$.

З-ча **2**. Даны прямая и две точки A и B по одну сторону от неё. Найти на прямой такую точку M, чтобы сумма $MA+MB$ равнялась заданному отрезку.

Реш **2**. Пусть l — данная прямая, a — данный отрезок. Пусть, далее, S — окружность радиуса a с центром B, S' — окружность радиуса AM с центром M, A' — точка, симметричная точке A относительно прямой l. Тогда окружность S' касается окружности S, а точка A' лежит на окружности S'. Остаётся провести через данные точки A и A' окружность S', касающуюся данной окружности S, и найти её центр M. Окружность S' строится следующим образом. Можно считать, что центр окружности S не лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AA' (иначе построение очевидно). Возьмём произвольную точку C окружности S и построим описанную окружность треугольника $AA'C$; она пересекает S в некоторой точке D. Пусть X — точка пересечения прямых AA' и CD. Проведём к окружности S касательные XP и XQ. Тогда описанные окружности треугольников $AA'P$ и $AA'Q$ искомые, так как $XP^2=XQ^2=XA\cdot XA'$.

З-ча **3**. По двум скрещивающимся прямым скользят два отрезка. Доказать, что объем тетраэдра с вершинами в концах этих отрезков не зависит от положения последних.

Реш **3**. Покажем, что объём такого тетраэдра равен $\frac{1}{6}abd\sin\varphi$, где a и b — длины отрезков, d — расстояние между скрещивающимися прямыми, φ — угол между ними. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через рёбра тетраэдра параллельно противоположным рёбрам. Плоскости граней исходного тетраэдра отсекают от параллелепипеда 4 тетраэдра, объём каждого из которых составляет $1/6$ объёма параллелепипеда. Поэтому объём тетраэдра составляет $1/3$ объёма параллелепипеда. А объём параллелепипеда легко вычисляется, поскольку его грань является параллелограммом с диагоналями a и b у углом φ между ними, а высота, опущенная на эту грань равна d.

Второй тур

З-ча **1**. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Через каждые две из них провести окружность так, чтобы три проведенные окружности имели в точках пересечения взаимно перпендикулярные касательные.

Реш **1**. Пусть A, B, C — данные точки, A', B', C' — центры требуемых окружностей (A' — центр окружности, проходящей через точки B и C и т.д.). Треугольники $BA'C$, $AB'C$, $AC'B$ равнобедренные. Пусть x, y, z — углы при их основаниях. Тогда

$$\begin{cases} y+z+\angle A &= \pm 90^\circ, \\ z+x+\angle B &= \pm 90^\circ, \\ x+y+\angle C &= \pm 90^\circ. \end{cases}$$

Эта система уравнений легко решается. Например, чтобы найти x, нужно сложить два последних уравнения и вычесть из них первое уравнение. Если же мы знаем (ориентированные) углы x, y, z, то требуемые окружности строятся очевидным образом.

З-ча **2**. В пространстве расположен правильный додекаэдр. Сколькими способами можно провести плоскость так, чтобы она высекла на додекаэдре правильный шестиугольник?

Реш 2. Ответ: 30 способами. Прежде всего заметим, что для каждой из 10 больших диагоналей додекаэдра есть ровно три различных плоскости, перпендикулярных этой диагонали и высекающих правильный шестиугольник. Действительно, будем двигать плоскость, перпендикулярную диагонали, от одной вершины к другой. Сначала в сечении будет правильный треугольник, потом неправильный шестиугольник, который в определённый момент станет правильным, потом снова неправильный шестиугольник, который станет правильным, когда мы дойдём до центра додекаэдра; после этого всё повторится в обратном порядке. Остаётся проверить, что плоскость, не перпендикулярная большим диагоналям додекаэдра, не может высекать правильный шестиугольник. Для этого нужно рассмотреть следующие случаи: 1) параллельные стороны правильного шестиугольника лежат на двух смежных гранях; 2) параллельные стороны шестиугольника лежат на двух несмежных гранях, граничащих с одной и той же гранью; 3) параллельные стороны шестиугольника лежат на двух противоположных гранях. Первый случай невозможен. Второй случай легко разбирается. В третьем случае, если учесть второй, то окажется, что каждая пара параллельных сторон лежит на противоположных гранях. Этот случай теперь тоже несложно разобрать.

З-ча 3. На сколько частей разделяют n-угольник его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?

Реш 3. Ответ: на $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-3)}{2}+1$ частей.

Будем поочерёдно проводить диагонали. Когда мы проводим новую диагональ, число частей, на которые проведённые ранее диагонали делят многоугольник, увеличивается на $m+1$, где m — число точек пересечения новой диагонали с ранее проведёнными, т.е. каждая новая диагональ и каждая новая точка пересечения диагоналей увеличивают число частей на 1. Поэтому общее число частей, на которые диагонали делят n-угольник, равно $D+P+1$, где D — число диагоналей, P — число точек пересечения диагоналей. Ясно, что $D=\frac{n(n-3)}{2}$. Остаётся вычислить P. Любой точке пересечения диагоналей соответствуют две диагонали, концы которых задают четыре вершины n-угольника. Наоборот, четыре вершины n-угольника определяют одну точку пересечения диагоналей. Поэтому P равно количеству способов выбора четырёх точек из n, т.е. $P=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

IV олимпиада (1938)

Второй тур

З-ча **1**. В пространстве даны точки O_1, O_2, O_3 и точка A. Точка A симметрично отражается относительно точки O_1, полученная точка A_1 — относительно O_2, полученная точка A_2 — относительно O_3.

Получаем некоторую точку A_3, которую также последовательно отражаем относительно O_1, O_2, O_3. Доказать, что полученная точка совпадает с A.

Реш **1**. Легко проверить, что $\overrightarrow{AA_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$, $\overrightarrow{A_2A_4} = 2\overrightarrow{O_3O_1}$ и $\overrightarrow{AA_6} = 2\overrightarrow{O_2O_3}$. Поэтому $\overrightarrow{AA_6} = \overrightarrow{0}$, т.е. $A = A_6$.

З-ча **2**. На сколько частей могут разделить пространство n плоскостей?

Реш **2**. Ответ: на $(n^3+5n+6)/6$ частей. (*Мы предполагаем, что набор плоскостей невырожденный в том смысле, что любые три плоскости пересекаются в одной точке и никакие четыре плоскости не имеют общей точки. Если же рассматривать вырожденные наборы плоскостей, то возникает много вариантов. Описать все возможные ответы в этом случае очень трудно. — Прим. ред.*)

Докажем сначала, что n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, разбивают плоскость на $(n^2+n+2)/2$ частей. Доказательство проведём индукцией по n. Для $n = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для n прямых, и докажем его для $n+1$ прямых. Выделим среди них одну прямую. Остальные прямые делят её на $n+1$ частей, каждая из которых делит на две части какую-либо из тех частей, на которые делят плоскость n прямых. Поэтому после проведения одной прямой число частей увеличилось на $n+1$. Остаётся заметить, что $\frac{(n+1)^2+(n+1)+2}{2} = \frac{n^2+n+2}{2} + n + 1$.

Для плоскостей доказательство проводится почти так же, как и для прямых. Нужно лишь воспользоваться тем, что n плоскостей пересекают выделенную плоскость по n прямым, т.е. они разбивают её на $(n^2+n+1)/2$ частей. Для $n = 0$ утверждение очевидно; равенство

$$\frac{(n+1)^3+5(n+1)+6}{6} = \frac{n^3+5n+6}{6} + \frac{n^2+n+2}{2}$$

проверяется простыми вычислениями.

З-ча **3**. Построить треугольник по основанию, высоте и разности углов при основании.

Реш **3**. Пусть надо построить треугольник ABC по основанию c, высоте h_c и разности углов A и B. Предположим, что треугольник ABC построен. Обозначим через C' точку, симметричную C относительно серединного перпендикуляра к стороне AB, через B' — точку, симметричную B относительно прямой CC'. Для определённости будем считать, что $AC < BC$. Тогда $\angle ACB' = \angle ACC' + \angle C'CB = 180^\circ - \angle A + \angle C'CB = 180^\circ - (\angle A - \angle B)$, т.е. угол ACB' известен.

Треугольник ABB' можно построить, так как $AB = c$, $BB' = 2h_c$ и $\angle ABB' = 90^\circ$. Точка C является точкой пересечения серединного перпендикуляра к отрезку BB' и дуги окружности, из которой отрезок AB' виден под углом $180^\circ - (\angle A - \angle B)$.

З-ча **4**. Сколько существует натуральных[2] чисел, меньших тысячи, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Реш **4**. Ответ: 686 чисел. Сначала вычеркнем из набора чисел 1, 2, ... , 999 числа, кратные 5; их количество равно $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$. Затем из того же набора чисел 1, 2, ... , 999 вычеркнем числа, кратные 7; их количество равно $\left[\frac{999}{7}\right] = 142$. При этом числа, кратные 35, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно $\left[\frac{999}{35}\right] = 28$. Значит, всего мы вычеркнули $199 + 142 - 28 = 313$ чисел, а осталось $999 - 313 = 686$ чисел.

[2] В оригинальной формулировке вместо *натуральных* говорилось *целых*, но имелись в виду именно натруральные числа — прим. ред.

V олимпиада (1939)

Первый тур

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xyz - x^3 - y^3 - z^3 &= b^3, \\ x + y + z &= 2b, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= b^2. \end{cases}$$

Реш **1**. Рассмотрим сначала случай, когда $b = 0$. В этом случае последние два уравнения запишутся в виде $z = -x - y$ и $z^2 = x^2 + y^2$. Возведя первое из них в квадрат, получим $xy = 0$. Значит, $x = 0$, $z = -y$ или $y = 0$, $z = -x$. Первое уравнение исходной системы при этом выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда $b \neq 0$. Воспользуемся тождеством

$$3xyz - x^3 - y^3 - z^3 = (x + y + z)(xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2).$$

Из первого и второго уравнений следует, что $xy+yz+xz-x^2-y^2-z^2 = \frac{b^2}{2}$. Возведя в квадрат уравнение $x+y+z = 2b$, получим $x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz = 4b^2$. Следовательно, $x^2+y^2+z^2 = b^2$ и $xy+yz+xz = \frac{3}{2}b^2$. Сравнивая первое из этих уравнений с последним уравнением исходной системы, получаем $z = 0$. Таким образом, $x^2 + y^2 = b^2$ и $xy = \frac{3}{2}b^2$. Решая эту систему уравнений, находим $x = \left(1 \pm \sqrt{\frac{-1}{2}}\right) b$, $y = \left(1 \mp \sqrt{\frac{-1}{2}}\right) b$.

З-ча **2**. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

Реш **2**. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, вписанный в окружность радиуса 1 с центром O. Сумма векторов, идущих из точки O в вершины этого пятиугольника, равна нулю, поскольку при повороте на угол $\frac{2\pi}{5}$ эта сумма переходит сама в себя. Поэтому сумма проекций векторов $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ на ориентированную прямую OA равна -1. С другой стороны, эта сумма проекций равна $2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

З-ча **3**. Даны три точки A, B, C. Через точку A провести прямую так, чтобы сумма расстояний от точек B и C до этой прямой была равна заданному отрезку.

Реш **3**. Предположим, что требуемая прямая l построена. Рассмотрим два случая.

Случай 1. *Прямая l пересекает отрезок BC.*

Проведём из точки B перпендикуляр к прямой l, а из точки C проведём прямую, параллельную l. Пусть A' — точка пересечения двух проведённых прямых. Треугольник $A'BC$ прямоугольный. В нём известны гипотенуза BC и катет $A'B$. Из этого вытекает следующее построение. Построим треугольник $A'BC$, а затем проведём прямую l, перпендикулярную BA'. Если прямая l пересекает отрезок BA', то эта прямая искомая.

Случай 2. *Прямая l не пересекает отрезок BC.*

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABA'C$. Сумма расстояний от точек B и C до прямой l равна расстоянию от точки A' до прямой l. Из этого вытекает следующее построение. Построим прямоугольный треугольник $AA'H$ с заданной гипотенузой AA' и катетом $A'H$, длина которого равна длине данного отрезка. Если прямая $l = AH$ не пересекает отрезок BC, то эта прямая искомая.

З-ча **4**. Решить уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

Реш **4**. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Относительно a это уравнение квадратное. Решая его, получаем два решения:

$$\begin{aligned} a &= x^2 + x + 1; \\ a &= x^2 - x. \end{aligned}$$

Решая эти квадратные уравнения относительно x, получаем четыре решения:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{a - \tfrac{3}{4}}; \\ x_{3,4} &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{a + \tfrac{1}{4}}. \end{aligned}$$

З-ча **5**. Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.

Реш **5**. Пусть AD, AM и AH — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Пусть, далее, D' — точка пересечения прямой AD с описанной окружностью этого треугольника. Тогда D' — середина дуги BC, поэтому $MD' \parallel AH$. Из этого следует, что точка D лежит на отрезке MH.

Второй тур

З-ча **1**. Разложить на целые рациональные множители выражение

$$a^{10} + a^5 + 1.$$

Реш **1**. Ответ: $(a^2 + a + 1)(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$.

З-ча **2**. Даны два многочлена от переменной x с целыми коэффициентами. Произведение их есть многочлен от переменной x с чётными коэффициентами, не все из которых делятся на 4. Доказать, что в одном из многочленов все коэффициенты чётные, а в другом — хоть один нечётный.

Реш **2**. Из того, что не все коэффициенты произведения делятся на 4, следует, что у одного многочлена есть нечётный коэффициент. Нужно доказать, что у другого многочлена нет нечётных коэффициентов. Предположим, что у обоих многочленов есть нечётные коэффициенты. Заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2. В результате получим многочлены $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + x^r$ и $b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + x^s$. Если в произведении данных многочленов мы заменим каждый коэффициент на его остаток от деления на 2, то получим многочлен $a_n b_m x^{n+m} + \dots + x^{r+s}$. Таким образом в произведении данных многочленов коэффициент при x^{r+s} нечётен, что противоречит условию.

З-ча **3**. Даны две точки A и B и окружность. Найти на окружности точку X так, чтобы прямые AX и BX отсекли на окружности хорду CD, параллельную данной прямой MN.

Реш **3**. Предположим, что мы построили требуемую точку X. Пусть прямая AX пересекает данную окружность S в точке C, а прямая BX — в точке D. Проведём через точку D прямую, параллельную прямой AB; она пересекает окружность S в некоторой точке K. Пусть прямая KC пересекает прямую AB в точке P. Треугольники APC и AXB подобны, поскольку угол A у них общий и $\angle APC = \angle CKD = \angle CXD$. Из подобия этих треугольников следует, что $AP \cdot AB = AC \cdot AX$.

Из этого вытекает следующее построение. Проведём через точку A прямую, пересекающую окружность S в некоторых точках C' и X'. Тогда $AP \cdot AB = AC \cdot AX = AC' \cdot AX'$, поэтому мы можем построить точку P. Далее, нам известен угол CDK (он равен углу между прямыми AB и MN). Поэтому мы знаем длину хорды KC, а значит, мы можем построить окружность S', которая имеет тот же самый центр, что и окружность S, и касается хорды KC. Проведя из точки P касательную к окружности S', находим точку C.

З-ча **4**. Найти остаток от деления на 7 числа

$$10^{10} + 10^{(10^2)} + 10^{(10^3)} + \dots + 10^{(10^{10})}.$$

Реш **4**. Заметим, что $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, поскольку $10^3 + 1$ делится на 7, и $10^k \equiv 4 \pmod 6$ при $k \geqslant 1$, поскольку число $99\dots96$ чётно и делится на 3. Значит, $10^{10^k} \equiv 10^4 \pmod 7$ при $k \geqslant 1$. Поэтому требуемый остаток равен остатку от деления числа $10 \cdot 10^4 = 10^5$ на 7. Этот остаток равен 5.

З-ча **5**. Дана правильная пирамида. Из произвольной точки P её основания восставлен перпендикуляр к плоскости основания. Доказать, что сумма отрезков от точки P до точек пересечения перпендикуляра с плоскостями граней пирамиды не зависит от выбора точки P на основании.

Реш **5**. Пусть Π — плоскость основания пирамиды, Q — точка пересечения перпендикуляра к плоскости Π, восставленного из точки P, с плоскостью грани пирамиды, R — основание перпендикуляра, опущенного на ребро этой грани, лежащее в плоскости Π. Тогда $PQ = PR \operatorname{tg} \varphi$, где $\varphi = \angle PRQ$. Угол φ — это угол наклона плоскости грани к плоскости основания. Для всех граней пирамиды он один и тот же. Поэтому нужно доказать, что для правильного многоугольника, лежащего в основании пирамиды, имеет место следующее утверждение: «Для любой точки P, лежащей внутри правильного многоугольника, сумма расстояний от P до сторон многоугольника одна и та же.» Чтобы доказать это утверждение, разрежем правильный многоугольник на треугольники, проведя отрезки из точки P в вершины. С одной стороны, сумма площадей этих треугольников постоянна (она равна площади многоугольника). С другой стороны, она равна половине произведения суммы расстояний от точки P до сторон многоугольника на длину стороны правильного многоугольника.

З-ча **6**. На какое самое большее число частей можно разбить пространство пятью сферами?

Реш **6**. Ответ: на 30 частей.

Пусть a_n — наибольшее число частей, на которые разбивают сферу n окружностей, b_n — наибольшее число частей, на которые разбивают пространство n сфер. Ясно, что $a_2 = 2$ и $b_2 = 2$. Покажем, что $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$ и $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$. Прежде всего заметим, что число частей будет наибольшим в том случае, когда никакие три окружности не пересекаются в одной точке и, соответственно, никакие четыре сферы не пересекаются в одной точке и никакие три сферы не имеют общей окружности. Действительно, иначе число частей всегда можно увеличить, слегка пошевелив окружности (сферы). Пусть на сфере дано n окружностей, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Фиксируем одну из них. Оставшиеся окружности разбивают сферу не более чем на a_{n-1} частей, причём возможна конфигурация, когда они разбивают сферу на a_{n-1} частей. Фиксированная окружность пересекает остальные окружности не более чем в $2n-2$ точках, причём случай, когда число точек пересечения равно $2n-2$, возможен. Точки пересечения разбивают фиксированную окружность на $2n-2$ частей; каждая их этих частей окружности добавляет одну новую часть разбиения сферы. Поэтому $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$. Равенство $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ доказывается аналогично. Таким образом, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 14$ и $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 16$, $b_5 = 30$.

VI олимпиада (1940)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Разложить на множители: $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

Реш **1**. О т в е т : $3(b-c)(c-a)(a-b)$.

З-ча **2**. Пароход от Горького до Астрахани идёт 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько дней будут плыть по течению плоты от Горького до Астрахани?

Реш **2**. О т в е т : 35. Пусть v — скорость течения реки, u — скорость парохода, l — расстояние от Горького до Астрахани. По условию $\frac{l}{u+v}=5$ и $\frac{l}{u-v}=7$; требуется найти l/v. Из системы уравнений $l=5u+5v,\ l=7u-7v$ находим $l/v=35$.

З-ча **3**. Сколькими нулями оканчивается произведение всех целых чисел от 1 до 100 включительно?

Реш **3**. О т в е т : 24. Среди чисел от 1 до 100 есть 20 чисел, делящихся на 5, и 4 числа, делящихся на 25 (чисел, делящихся на 125, среди них нет). Поэтому рассматриваемое произведение делится на 5^{24} и не делится на 5^{25}. Ясно также, что оно делится на 2^{24}.

З-ча **4**. Провести данным радиусом окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности. Сколько решений имеет эта задача?

Реш **4**. Пусть r — данный радиус, R и O — радиус и центр данной окружности. Центр искомой окружности лежит на окружности S радиуса $|R\pm r|$ с центром O. С другой стороны, её центр лежит на прямой l, параллельной данной прямой и удалённой от неё на расстояние r; таких прямых две. Любая точка пересечения окружности S и прямой l может служить центром искомой окружности. Задача может иметь от 0 до 8 решений.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2) = 2b^5, \\ x+y = b. \end{cases}$$

Реш **1**. Пусть $xy=t$. Тогда $x^2+y^2=b^2-2t$ и $x^3+y^3=b(b^2-3t)$. Поэтому $b(b^2-2t)(b^2-3t)=2b^5$. Если $b=0$, то получаем решение $x=-y$. Если $b\neq 0$, то для t получаем квадратное уравнение $(b^2-2t)(b^2-3t)=2b^4$. Решив его, находим $t_1=b^2$, $t_2=-b^2/6$. Остаётся заметить, что x и y являются корнями квадратного уравнения $X^2-bX+t=0$.

З-ча **2**. Все целые числа выписаны подряд, начиная от единицы. Определить, какая цифра стоит на 206 788-м месте.

Реш **2**. О т в е т : цифра 7. Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99-9=90$, трёхзначных $999-99-9=900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90\cdot 2=180$ мест, трёхзначные $900\cdot 3=2700$ мест, четырёхзначные $9000\cdot 4=36\,000$ мест, пятизначные $90000\cdot 5=450\,000$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит пятизначному числу.

Цифры, принадлежащие не более чем четырёхзначным числам, имеют номера от 1 до $9+180+2700+36\,000=38\,889$. Разность $206\,788-38\,889=167\,899$ нужно разделить на 5 с остатком: $167\,899=5\cdot 33\,579+4$. Интересующая нас цифра принадлежит 33 580-му пятизначному числу, т.е. числу 43 579 (первое пятизначное число — это число 10 000). В этом числе интересующая нас цифра стоит на 4-м месте.

З-ча **3**. Построить окружность, равноудаленную от четырех точек плоскости. Сколько решений имеет задача?

Реш **3**. О т в е т : 7 решений (в невырожденном случае).

Пусть A, B, C, D — данные точки, S — искомая окружность. По одну сторону от S лежит k данных точек, по другую сторону лежит $4-k$ данных точек. Мы будем предполагать, что данные точки не лежат на одной окружности (иначе в качестве S можно взять любую окружность с тем же центром; получается бесконечно много решений). Таким образом, $1\leqslant k\leqslant 3$. Мы получаем два существенно различных расположения точек по отношению к S: $2+2$ и $1+3$.

Пусть сначала точки A и B лежат по одну сторону от окружности S, а точки C и D — по другую. Центром окружности S является точка O пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB и

CD. Радиус окружности S равен среднему арифметическому длин отрезков OA и OC. Четыре точки можно разбить на пары тремя способами, поэтому мы получаем 3 решения.

Пусть теперь точки A, B и C лежат по одну сторону от окружности S, а точка D — по другую. Проведём через точки A, B и C окружность. Пусть O и R — её центр и радиус. Точка O является центром искомой окружности, а радиус искомой окружности равен среднему арифметическому R и OD. Одну точку из четырёх можно выбрать четырьмя способами, поэтому мы получаем 4 решения.

З-ча **4**. В плоскости даны две прямые. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от этих прямых равна заданному отрезку.

Реш **4**. Пусть a — заданный отрезок. Пусть, далее, точки пересечения данных прямых l_1 и l_2 с прямыми, параллельными l_1 и l_2 и удалёнными от них на расстояние a, образуют прямоугольник $M_1M_2M_3M_4$. Покажем, что искомое ГМТ — продолжения сторон этого прямоугольника. Опустим из точки X перпендикуляры XA_1 и XA_2 на данные прямые l_1 и l_2. Пусть, например, $XA_1 - XA_2 = a$. Возьмём на луче A_1X точку B так, что $A_1B = a$. Тогда $BX = XA_2$. Пусть M — точка пересечения прямой l_2 и прямой, проходящей через точку B параллельно прямой l_1 (M — это одна из точек M_1, M_2, M_3, M_4). Тогда MX — биссектриса угла BMA_2.

З-ча **5**. Факториалом числа n называется произведение всех целых чисел от 1 до n включительно. Найти все трёхзначные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

Реш **5**. Ответ: 145. Пусть $N = 100x + 10y + z$ — искомое число, для которого $N = x! + y! + z!$. Число $7! = 5040$ четырёхзначное, поэтому ни одна цифра числа N не превосходит 6. Поэтому число N меньше 700. Но тогда ни одна цифра числа N не превосходит 5, поскольку $6! = 720$. Неравенство $3 \cdot 4! = 72 < 100$ показывает, что хотя бы одна цифра числа N равна 5. При этом $x \neq 5$, поскольку $3 \cdot 5! = 360 < 500$. Это неравенство показывает также, что $x \leqslant 3$. Более того, $x \leqslant 2$, поскольку $3! + 2 \cdot 5! = 246 < 300$. Число 255 не удовлетворяет условию задачи, а если лишь одна цифра искомого числа равна 5, то $x \leqslant 1$, поскольку $2! + 5! + 4! = 146 < 200$. Так как $1! + 5! + 4! = 145 < 150$, получаем $y \leqslant 4$. Следовательно, $z = 5$. Учитывая, что $x = 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 4$, находим единственное решение $N = 145$.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Найти четырёхзначное число, являющееся точным квадратом, и такое, что две первые цифры одинаковы между собой и две последние также.

Реш **1**. Пусть a — первая и вторая цифры, b — третья и четвёртая. Тогда данное число равно $11(b + 100a)$, поэтому $b + 100a = 11x^2$ для некоторого натурального числа x. Кроме того, $100 \leqslant b + 100a \leqslant 908$, а значит, $3 \leqslant x \leqslant 9$. Вычисляя квадраты чисел $33, 44, \ldots, 99$, получаем, что ровно одно из них имеет требуемый вид: $88^2 = 7744$.

З-ча **2**. Точки A, B, C — вершины вписанного в окружность равностороннего треугольника. Точка D лежит на меньшей дуге AB. $DC = AD + BD$. Доказать.

Реш **2**. Прежде всего заметим, что $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$, поскольку эти углы опираются на одну и ту же дугу. Аналогично $\angle BDC = 60^\circ$. Отложим на отрезке CD точки K и L так, чтобы треугольники BDK и ADL были правильными. Треугольники ADB и ALC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $CL = DB$, а значит, $DC = DL + LC = AD + BD$.

З-ча **3**. Данным четырёхугольником неправильной формы настлать паркет, т.е. покрыть всю плоскость четырёхугольниками, равными данному, без промежутков и перекрытий.

Реш **3**. Составим из четырёх экземпляров данного четырёхугольника фигуру, как показано на рис.???. При этом $ABCD$ — параллелограмм и при сдвигах на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ одна пара сторон фигуры переходит в другую пару сторон.

Очевидно, что параллелограммами можно покрыть всю плоскость, поэтому полученными фигурами тоже можно покрыть всю плоскость.

З-ча **4**. Сколько существует пар целых чисел x, y, заключённых между 1 и 1000, таких, что $x^2 + y^2$ делится на 7.

Реш **4**. Ответ: $142^2 = 20164$. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7. Действительно, квадрат целого числа при делении на 7 даёт остатки 0, 2 и 4. Количество целых чисел, заключенных между 1 и 1000 и делящихся на 7, равно 142. Поэтому искомое число равно $142^2 = 20164$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. На бесконечном конусе, угол развёртки которого равен α, взята точка. Из это точки в обе стороны проводится линия так, что после развёртки она превращается в отрезки прямых. Определить число ее самопересечений.

Реш **1**. О т в е т : число самопересечений равно n, где n — наибольшее натуральное число, для которого $n\alpha < 180°$.

Рассмотрим на плоскости точки S и A, соответствующие вершине конуса и взятой точке при развёртке конуса на эту плоскость. Восставим из точки A перпендикуляр к прямой SA и возьмём на этом перпендикуляре по одну сторону от прямой SA точки $B_1, \ldots, B_n$ так, что $\angle ASB_k = k\frac{\alpha}{2}$ Аналогично по другую сторону от прямой SA возьмём точки $C_1, \ldots, C_n$ так, что $\angle ASC_k = k\frac{\alpha}{2}$. На конусе точка B_k совпадает с точкой C_k; других точек самопересечения проведённой линии нет.

З-ча **2**. Что больше: 300! или 100^{300}?

Реш **2**. О т в е т : $300! > 100^{300}$.

Сначала докажем, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ для любого натурального n. Действительно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

поскольку $\frac{n-1}{2n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-2}{3n} < \frac{1}{2}$, $\frac{n-3}{4n} < \frac{1}{2}$ и т.д.

Из доказанного неравенства следует, что

$$\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} : \left(\frac{n}{3}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{3} < n+1.$$

Поэтому индукцией по n получаем неравенство $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n!$. Остаётся подставить в него $n = 300$.

З-ча **3**. Центр O описанной около треугольника ABC окружности отражается симметрично относительно каждой из сторон. По трем полученным точкам O_1, O_2, O_3 восстановить треугольник ABC, если все остальное стёрто.

Реш **3**. Пусть точки O_1, O_2 и O_3 симметричны точке O относительно сторон BC, CA и AB соответственно. Пусть, далее, A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB. Тогда $BC \| B_1C_1 \| O_2O_3$ и $OA_1 \perp BC$. Поэтому $OO_1 \perp O_2O_3$. Аналогично $OO_2 \perp O_1O_3$ и $OO_3 \perp O_1O_2$. Таким образом, O — точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$. Построив точку O, проводим серединные перпендикуляры к отрезкам OO_1, OO_2, OO_3. Эти прямые образуют треугольник ABC.

З-ча **4**. Доказать неравенство:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n;$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа).

Реш **4**. Числа $b_1 = a_1/a_2$, $b_2 = a_2/a_3$, $\ldots$, $b_n = a_n/a_1$ положительны и их произведение равно 1. Поэтому их среднее геометрическое равно 1. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим среднее арифметическое этих чисел не меньше 1, т.е. их сумма не меньше n.

З-ча **5**. Сколько существует положительных целых чисел x, меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

Реш **5**. О т в е т : 2857. Остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 повторяются с периодами 3 и 7, поэтому остатки от деления на 7 числа $2^x - x^2$ повторяются с периодом 21. Среди чисел x от 1 до 21 равные остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 дают ровно 6 чисел. Поэтому среди чисел от 1 до $9996 = 7\cdot 476$ есть $476\cdot 6 = 2856$ требуемых чисел. Непосредственная проверка с использованием полученной последовательности остатков показывает, что из оставшихся чисел 9997, 9998 и 9999 только число 9998 обладает требуемым свойством.

VII олимпиада (1941)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Построить треугольник по высоте и медиане, выходящим из одной вершины, и радиусу описанного круга.

Реш **1**. Пусть ABC — искомый треугольник, AH — высота, AM — медиана, R — радиус описанного круга, O — его центр. Построим прямоугольный треугольник AHM по катету и гипотенузе. Восставим из точки M перпендикуляр l к прямой MH. Точка O является точкой пересечения прямой l с окружностью радиуса R с центром A. Вершины B и C являются точками пересечения прямой MH с окружностью радиуса R с центром O.

З-ча **2**. Дописать к $523\ldots$ три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

Реш **2**. Ответ: $523\,152$ или $523\,656$.

Полученное число должно делиться на $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Поделим $523\,000$ на 504 с остатком: $523\,000 = 1037 \cdot 504 + 352$. Поскольку $504 - 352 = 152$, на 504 делятся числа $523\,152$ и $523\,152 + 504 = 523\,656$. Других чисел, делящихся на 504, среди чисел от $523\,000$ до $523\,999$ нет.

З-ча **3**. Дан четырёхугольник; A, B, C, D — последовательные середины его сторон, P, Q — середины диагоналей. Доказать, что треугольник BCP равен треугольнику ADQ.

Реш **3**. Отрезки AD и CB параллельны одной из диагоналей, а их длина равна половине её длины. Отрезки DQ и BP параллельны одной из сторон четырёхугольника, а их длина равна половине её длины. Отрезки AQ и CP тоже параллельны стороне четырёхугольника и их длина равна половине длине этой стороны.

З-ча **4**. Через точку P, лежащую вне окружности, проводятся всевозможные прямые, пересекающие эту окружность. Найти множество середин хорд, отсекаемых окружностью на этих прямых.

Реш **4**. Пусть O — центр данной окружности, M — середина хорды, отсекаемой от окружности прямой, проходящей через точку P. Тогда $\angle PMO = 90^\circ$. Поэтому искомое множество — часть окружности с диаметром OP, лежащая внутри данной окружности.

З-ча **5**. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел в сумме с единицей даёт полный квадрат.

Реш **5**. Достаточно заметить, что

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = \big(n(n+3)+1\big)^2.$$

9 — 10 классы

З-ча **1**. См. задачу 2 для 7 — 8 классов.

З-ча **2**. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры лежат в вершинах некоторого квадрата.

Реш **2**. Пусть P, Q и R — центры квадратов, построенных на сторонах DA, AB и BC параллелограмма с острым углом α при вершине A. Легко проверить, что $\angle PAQ = 90^\circ + \alpha = \angle RBQ$, а значит, $\Delta PAQ = \Delta RBQ$. Стороны AQ и BQ этих треугольников перпендикулярны, поэтому $PQ \perp QR$.

З-ча **3**. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

принимающий при $x = 0$ и $x = 1$ нечётные значения, не имеет целых корней.

Реш **3**. Пусть $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. По условию числа $a_n = P(0)$ и $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = P(1)$ нечётны. Если x — чётное число, то $P(x) \equiv a_n \pmod 2$. Если x — нечётное число, то $P(x) \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 2$. В обоих случаях получаем, что число $P(x)$ нечётно, поэтому оно не может быть равно нулю.

З-ча **4**. Построить треугольник ABC по точкам M и N — основаниям высот AM и BN — и прямой, на которой лежит сторона AB.

Реш **4**. Точки M и N лежат на окружности с диаметром AB. Центр O этой окружности является точкой пересечения прямой AB и серединного перпендикуляра к отрезку NM, поэтому мы можем его построить. Точки A и B являются точками пересечения прямой AB и окружности с центром O, проходящей через точку M. Поэтому точки A и B можно построить. Точка C после этого строится как точка пересечения прямых AN и BM.

З-ча **5**. Решить уравнение:

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = x+2.$$

Реш **5**. О т в е т : $x = -2$ или $x \geqslant 2$.

Если $x \geqslant 2$, получаем тождество.

Если $1 \leqslant x < 2$, получаем уравнение $4x = 8$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $0 \leqslant x < 1$, получаем уравнение $-2x = 2$, которое не имеет корней на данном интервале.

Если $-1 \leqslant x < 0$, получаем $0 = 2$, чего не может быть.

Если $x < -1$, получаем корень $x = -2$.

З-ча **6**. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin x = \frac{x}{100}?$$

Реш **6**. О т в е т : 63.

Прежде всего отметим, что число положительных корней равно числу отрицательных корней, а ещё есть корень 0. Поэтому достаточно убедиться, что число положительных корней равно 31. Если $\sin x = \frac{x}{100}$, то $|x| = 100|\sin x| \leqslant 100$. Рассмотрим графики функций $y = x/100$ и $y = \sin x$. Участок оси Ox от 0 до 100 содержит 15 отрезков длиной 2π и один отрезок длиной меньше 2π. Рассматривая указанные графики, легко убедиться, что на первом отрезке длиной 2π есть один корень данного уравнения, а на каждом из остальных 14 отрезков длиной 2π есть два корня. Вычисления показывают, что длина последнего отрезка больше π, поэтому на нём тоже есть два корня. Всего получаем 31 положительный корень.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Доказать, что из 5 попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

Реш **1**. Предположим, что из нескольких попарно различных по величине квадратов сложен прямоугольник. Рассмотрим самый маленький квадрат Q. С одной из его сторон имеет общую часть сторона некоторого большего квадрата A. Сторона квадрата A выходит за пределы стороны квадрата Q. Образовавшийся угол должен быть заполнен некоторым квадратом B, сторона которого снова больше стороны квадрата Q. Получаем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом C, а затем ещё один угол, который должен быть заполнен квадратом D. При этом между квадратами A и D не может быть «колодца» (т.е. квадраты A и D должны иметь общую границу), поскольку иначе для заполнения «колодца» потребовался бы квадрат, который меньше самого маленького квадрата Q.

Итак, если из пяти попарно различных по величине квадратов можно сложить прямоугольник, то мы знаем, как они должны быть сложены: самый маленький квадрат находится в центре, а к нему примыкают четыре других квадрата, образуя следующую конфигурацию (или симметричную ей):

```
-------------|
|    A    |   |
|-------| D  |
|    | Q |    |
| B |--------|
|    |   C    |
|------------|
```

Пусть q, a, b, c, d — длины сторон квадратов. Тогда $a = b + q$, $b = c + q$, $c = d + q$, $d = a + q$. Сложив эти равенства, получим $5q = 0$. Этого не может быть.

З-ча **2**. Дан треугольник ABC. Требуется разрезать его на наименьшее число частей так, чтобы, перевернув эти части на другую сторону, из них можно было сложить тот же треугольник ABC.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан треугольник ABC. Точка M, лежащая внутри него, движется параллельно стороне BC до пересечения со стороной CA, затем параллельно стороне AB до пересечения со стороной BC, затем параллельно стороне CA и т.д. Доказать, что через некоторое число таких шагов точка вернется в исходное положение, и найти это число.

Реш **3**. Пусть A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, ... — последовательные точки траектории на сторонах треугольника ABC. Так как $A_1B_1 \| AB_2$, $B_1B_2 \| CA_1$ и $B_1C \| B_2C_2$, то треугольник AB_2C_2 получается из треугольника A_1B_1C параллельным переносом. Аналогично треугольник A_3BC_3 получается из AB_2C_2 параллельным переносом, а A_4B_4C — из A_3BC_3. Но треугольник A_1B_1C тоже получен из треугольника A_3BC_3 параллельным переносом. Поэтому $A_1 = A_4$, т.е. после семи шагов траектория замкнётся. (Если точка M лежит на одной из средних линий треугольника ABC, то траектория замкнётся после четырёх шагов.)

З-ча **4**. Найти целое число a, при котором

$$(x-a)(x-10)+1$$

разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$ двух множителей с целыми b и c.

Реш **4**. Пусть $(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$. Положив $x=-b$, получим $(b+a)(b+10) = -1$. Числа a и b целые, поэтому числа $b+a$ и $b+10$ тоже целые. Число -1 представляется в виде произведения двух множителей двумя способами. Соответственно получаем два варианта: 1) $b+10 = 1$ и $b+a = -1$; 2) $b+10 = -1$ и $b+a = 1$. Поэтому $a = 8$ или $a = 12$. В первом случае $(x-8)(x-10)+1 = (x-9)^2$, а во втором случае $(x-12)(x-10)+1 = (x-11)^2$.

З-ча **5**. Доказать, что квадрат любого простого числа $p > 3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

Реш **5**. Посмотрим, какие остатки может давать простое число $p > 3$ при делении на 6. Оно не может давать остаток 2 или 4, поскольку иначе оно было бы чётно. Оно не может давать остаток 3, поскольку иначе оно делилось бы на 3. Значит, простое число $p > 3$ при делении на 6 даёт остаток 1 или 5, т.е. оно имеет вид $6n \pm 1$; его квадрат имеет вид $36n^2 \pm 12n + 1$.

З-ча **6**. Построить треугольник ABC по трем точкам H_1, H_2 и H_3, которые являются симметричными отражениями точки пересечения высот искомого треугольника относительно его сторон.

Реш **6**. Пусть точки H_1, H_2 и H_3 симметричны точке пересечения высот H относительно сторон BC, CA и AB. Построение легко вытекает из следующего факта: если треугольник ABC остроугольный, то его вершины являются точками пересечения описанной окружности треугольника $H_1H_2H_3$ с продолжениями его биссектрис, а если, например, угол A тупой, то из точки H_1 нужно снова провести биссектрису, а из точек H_2 и H_3 — биссектрисы внешних углов.

Мы ограничимся разбором случая остроугольного треугольника. Углы BHC и CAB имеют перпендикулярные стороны, поэтому они составляют в сумме $180°$. Значит, $\angle BH_1C + \angle BAC = 180°$, т.е. точка H_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC. Аналогично доказывается, что точки H_2 и H_3 тоже лежат на описанной окружности треугольника ABC, поэтому описанные окружности треугольников ABC и $H_1H_2H_3$ совпадают. Далее, $\angle AH_1H_2 = \angle ACH_2 = \angle ACH_3 = \angle AH_1H_3$, поэтому H_1A — биссектриса треугольника $H_1H_2H_3$. Для H_2A и H_3A доказательство аналогично.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Доказать, что из шести попарно различных по величине квадратов нельзя сложить прямоугольник.

Реш **1**. Продолжим решение задачи 1 для 7 — 8 классов, пользуясь тем, что там уже доказано. Мы уже знаем, как должны быть расположены самый маленький квадрат и прилегающие к нему квадраты. Поэтому если из шести попарно различных квадратов можно сложить прямоугольник, то они должны быть расположены так:

```
--------------
|       | E  |
|   A   |-----
|-------| D  |
|   | Q |    |
| B |--------|
|   |   C    |
|------------|
```

Но тогда у квадратов D и E есть общая стороны, поэтому они равны. А по условию все квадраты попарно различны.

З-ча **2**. Некоторое количество точек расположено на плоскости так, что каждые 3 из них можно заключить в круг радиуса $r = 1$. Доказать, что тогда и все точки можно заключить в круг радиуса 1.

Реш **2**. Рассмотрим круг, содержащий все данные точки. Будем уменьшать радиус такого круга до тех пор, пока это возможно. Пусть R — радиус полученного круга. На границе этого круга лежат по крайней мере две данные точки. Рассмотрим сначала случай, когда на границе лежат ровно две точки A и B. Ясно, что они — диаметрально противоположные точки круга. Возьмём третью данную точку C. Минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R, поэтому $R \leqslant 1$. Рассмотрим теперь случай, когда на границе лежат ровно три данные точки A, B и C. Тогда треугольник ABC остроугольный, поскольку иначе можно было бы уменьшить радиус круга, содержащего все данные точки. Поэтому снова минимальный радиус круга, содержащего точки A, B и C, равен R. Рассмотрим наконец случай, когда на границе лежат по крайней мере четыре данные точки. Пусть $\alpha_1, \ \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — угловые величины последовательных дуг, на которые данные точки разбивают границу круга. Если сумма угловых величин двух последовательных дуг не больше 180°, то сотрём их общую точку. Покажем, что при $n \geqslant 4$ такая пара последовательных дуг всегда найдётся. Предположим, что $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$, $\alpha_2 + \alpha_3 > 180^\circ, \ldots, \alpha_n + \alpha_1 > 180^\circ$. Сложив эти неравенства, получим $2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) > n \cdot 180^\circ$, а значит, $4 \cdot 180^\circ > n \cdot 180^\circ$. Получено противоречие. Таким образом, на границе полученного круга лежат либо две диаметрально противоположные данные точки, либо три данные точки, являющиеся вершинами остроугольного треугольника. Такие случаи мы уже разбирали.

З-ча **3**. Найти такие отличные от нуля неравные между собой целые числа a, b, c, чтобы выражение

$$x(x-a)(x-b)(x-c)+1$$

разлагалось в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами.

Реш **3**. Пусть $x(x-a)(x-b)(x-c)+1 = P(x)Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Ясно, что $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены со старшим коэффициентом 1. При $x = 0$, $x = a$, $x = b$ и $x = c$ имеет место равенство $P(x)Q(x) = 1$, т.е. либо $P(x) = 1$ и $Q(x) = 1$, либо $P(x) = -1$ и $Q(x) = -1$. В обоих случаях $P(x) - Q(x) = 0$. Степень многочлена $P(x) - Q(x)$ строго меньше четырёх, поэтому $P(x) = Q(x)$ для всех x. Таким образом, $x(x-a)(x-b)(x-c) = P^2(x) - 1 = \big(P(x)+1\big)\big(P(x)-1\big)$. Поэтому $P(x) \pm 1 = x(x-a)$ и $P(x) \mp 1 = (x-b)(x-c)$, т.е. $x(x-a) - (x-b)(x-c) = \pm 2$ (мы не различаем решения, отличающиеся лишь перестановкой чисел a, b, c). Следовательно, $a = b + c$ и $bc = \mp 2$. В результате получаем следующие наборы значений (a, b, c): $(1,2,3)$, $(-1,-2,-3)$, $(1,-2,-1)$, $(2,-1,1)$. Им соответствуют следующие разложения многочлена $x(x-a)(x-b)(x-c)+1$: $(x^2-3x+1)^2$, $(x^2+3x+1)^2$, $(x^2+x-1)^2$, $(x^2-x-1)^2$.

З-ча **4**. Решить в целых числах уравнение

$$x + y = x^2 - xy + y^2.$$

Реш **4**. Ответ: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

Рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $-3y^2 + 6y + 1$. Он отрицателен при $y \geqslant 3$ и при $y \leqslant -1$. Поэтому для y получаем три возможных значения: 0, 1, 2. Для каждого из этих значений получаем уравнение, которое легко решается.

З-ча **5**. В пространстве даны две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Найти множество середин всех отрезков данной длины, концы которых лежат на этих прямых.

Реш **5**. Пусть a — расстояние между данными прямыми, d — длина рассматриваемых отрезков. Выберем систему координат так, чтобы точки первой прямой имели координаты $(x, 0, 0)$, а точки второй прямой имели координаты $(0, y, a)$. Нас интересуют пары точек, для которых $x^2 + a^2 + y^2 = d^2$, т.е. $x^2 + y^2 = d^2 - a^2$. Середины отрезка с концами в точках с координатами $(x, 0, 0)$ и $(0, y, a)$ имеет координаты $(x/2, y/2, a/2)$, поэтому искомое множество — окружность радиуса $\sqrt{d^2 - a^2}/2$ с центром $(0, 0, a/2)$, расположенная в плоскости $z = a/2$.

З-ча **6**. Построить прямоугольный треугольник по двум медианам, проведённым к катетам.

Реш **6**. Пусть a и b — длины медиан, x и y — длины катетов. Тогда $\frac{x^2}{4} + y^2 = a^2$ и $x^2 + \frac{y^2}{4} = b^2$. Поэтому $x^2 = \frac{16b^2 - 4a^2}{15}$ и $y^2 = \frac{16a^2 - 4b^2}{15}$.

VIII олимпиада (1945)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Разделить $a^{128}-b^{128}$ на $(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64})$.

Реш **1**. Ответ: $a-b$. Легко проверить, что если мы умножим $(a+b)(a^2+b^2)\dots(a^{64}+b^{64})$ на $(a-b)$, то получим $a^{128}-b^{128}$.

З-ча **2**. Доказать, что при любом целом положительном n сумма

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}$$

больше $\frac{1}{2}$.

Реш **2**. Сложим $n-1$ неравенств $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n}$, $\dots$, $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$ и равенство $\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}$. В результате получим требуемое.

З-ча **3**. Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, даёт полный квадрат. Найти все такие числа.

Реш **3**. Ответ: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

Пусть $10a+b$ — искомое число. По условию число $(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$ является квадратом некоторого числа k. Тогда k делится на 11, а значит, $a+b$ тоже делится на 11. Но $a+b\leqslant 18$, поэтому $a+b=11$.

З-ча **4**. Доказать, что разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

Реш **4**. Предположим, что отрезок CD разрезает разносторонний треугольник ABC на два равных треугольника ACD и BCD. Эти треугольники имеют, в частности, равные площади, поэтому $AD=BD$. Кроме того, сторона CD общая. Следовательно, оставшиеся стороны равны, т.е. $AC=BC$. Приходим к противоречию.

З-ча **5**. К двум окружностям, касающимся извне, проведены общие внешние касательные и точки касания соединены между собой. Доказать, что в полученном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Реш **5**. Пусть O — точка касания окружностей, A и D — точки касания с окружностями одной касательной, B и C — точки касания другой касательной (точки A и B лежат на одной окружности, C и D на другой). Проведём через точку O общую касательную к окружностям. Пусть она пересекает прямые BC и AD в точках P и Q. Две касательные, проведённые из одной точки к окружности, равны, поэтому $PB=PO=PC$ и $QA=QO=QD$. Из этого следует, что: 1) отрезок PQ является средней линией трапеции $ABCD$; 2) длина отрезка PQ равна полусумме длин сторон BC и AD. Остаётся заметить, что длина средней линии трапеции $ABCD$ равна полусумме длин её оснований AB и CD.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Разделить $a^{2^k}-b^{2^k}$ на

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\cdot\ldots\cdot(a^{2k-1}+b^{2k-1})$$

Реш **1**. Ответ: $a-b$. Легко проверить, что если умножить $(a+b)(a^2+b^2)\cdot\ldots\cdot(a^{2k-1}+b^{2k-1})$ на $a-b$, то получим $a^{2^k}-b^{2^k}$.

З-ча **2**. Найти трёхзначное число, всякая целая степень которого оканчивается на три цифры, составляющие исходное число (в том же порядке).

Реш **2**. Ответ: 376 и 625.

Пусть N — искомое число. Тогда $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000. Числа N и $N-1$ взаимно простые, поэтому одно из них делится на 8, а другое на 125. Пусть сначала $N=125k$. Тогда $k\leqslant 8$. Среди чисел $125k-1$, $k=1,\dots,8$, только число 624 делится на 8. Пусть теперь $N-1=125k$. Тогда $N=125k+1$, поэтому $k\leqslant 7$. Среди чисел $125k+1$, $k=1,\dots,7$, только число 376 делится на 8.

Если $N^2-N=N(N-1)$ делится на 1000, то $N^k-N=N(N^{k-1}-1)$ тоже делится на 1000, поскольку $N^{k-1}-1$ делится на $N-1$.

З-ча **3**. Система уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трех или до двух?

Реш **3**. Ответ: число решений уменьшается до трёх при $a = \pm 1$, число решений уменьшается до двух при $a = \pm\sqrt{2}$.

Из первого уравнения получаем $y = \pm x$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$(x-a)^2 + x^2 = 1. \qquad (1)$$

Число решений системы уменьшается до трёх, если одно из решений уравнения (1) обращается в нуль. Подставив в (1) $x = 0$, получим $a^2 = 1$, т.е. $a = \pm 1$. Число решений системы уменьшается до двух, если уравнение (1) имеет единственный корень (т.е. два совпадающих корня). Приравнивая нулю дискриминант уравнения (1), получаем $a = \pm\sqrt{2}$.

З-ча **4**. Прямоугольный треугольник ABC движется по плоскости так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла. Доказать, что множеством точек A является отрезок и найти его длину.

Реш **4**. Пусть O — вершина данного прямого угла. Точки O и A лежат на окружности с диаметром BC, поэтому $\angle AOB = \angle ACB = \angle C$. Из этого следует, что точка A движется по прямой, образующей со стороной данного прямого угла угол, равный $\angle C$. В крайних положениях расстояния от точки A до точки O равны гипотенузе BC и наименьшему катету BA. Действительно, $OA = BC\sin\varphi$, где $\varphi = \angle OCA$. Угол φ изменяется от $\angle C$ до $90^\circ + \angle C = 180^\circ - \angle B$, поэтому наибольшее значение $\sin\varphi$ равно 1, а наименьшее значение равно наименьшему из чисел $\sin C$ и $\sin B$. Таким образом, длина отрезка, по которому движется точка A, равна разности между длиной гипотенузы и длиной наименьшего катета прямоугольного треугольника ABC.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найти сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно написать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

Реш **1**. Ответ: 1 769 580.

Будем отдельно подсчитывать сумму тысяч, сотен, десятков и единиц для рассматриваемых чисел. На первом месте может стоять любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Количество всех чисел с фиксированной первой цифрой равно $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$, поскольку на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр, а на четвёртом месте может стоять любая из трёх цифр 0, 2, 4 (мы рассматриваем только чётные числа). Поэтому сумма тысяч равна $(1+2+3+4+5) \cdot 108 \cdot 1000 = 1\,620\,000$. Количество чисел с фиксированной второй цифрой равно $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ (на первом месте стоит любая из пяти цифр). Поэтому сумма сотен равна $(1+2+3+4+5) \cdot 90 \cdot 100 = 135\,000$. Аналогично сумма десятков равна $(1+2+3+4+5) \cdot 90 \cdot 10 = 13\,500$, а сумма единиц равна $(2+4) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,080$.

З-ча **2**. Из картона вырезали два одинаковых многоугольника, совместили их и проткнули в некоторой точке булавкой. При повороте одного из многоугольников около этой «оси» на $25^\circ 30'$ он снова совместился со вторым многоугольником. Каково наименьшее возможное число сторон таких многоугольников?

Реш **2**. Ответ: 240. Прежде всего заметим, что $\frac{1}{360} \cdot 25\frac{1}{2} = \frac{17}{240}$, причём числа 17 и 240 взаимно простые. Рассмотрим луч, идущий из «оси» в вершину первого многоугольника. Повороты этого луча вокруг «оси» на углы $k \cdot 25^\circ 30'$, где $k = 1, 2, \ldots, 240$, различны. Действительно, если повороты луча на углы $k_1 \cdot 25^\circ 30'$ и $k_2 \cdot 25^\circ 30'$ совпадают, то число $\frac{(k_1-k_2)17}{240}$ целое, а значит, $k_1 - k_2$ делится на 240. На каждом из этих 240 лучей есть вершина многоугольника, поэтому число сторон многоугольника не меньше 240. С другой стороны, при повороте правильного 240-угольника на угол $25^\circ 30'$ вокруг центра он совмещается сам с собой.

З-ча **3**. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ разделена на n равных частей. Первая точка деления P соединена с вершиной B. Доказать, что прямая BP отсекает на диагонали AC часть AQ, которая равна $\frac{1}{n+1}$ части диагонали $\left(AQ = \frac{AC}{n+1}\right)$.

Реш **3**. Разделим сторону BC тоже на n равных частей и проведём через точки деления прямые, параллельные прямой BP. Они разделят диагональ AC на $n+1$ равных частей.

З-ча **4**. Вершины A, B, C треугольника ABC соединены отрезками с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах треугольника. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 не лежат на одной прямой.

Реш **4**. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, CA, AB. Тогда середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Решить в целых числах уравнение

$$xy + 3x - 5y = -3$$

Реш **1**. Рассматриваемое уравнение можно переписать в виде $(x-5)(y+3) = -18$. Его решения в целых числах соответствуют представлениям числа -18 в виде произведения двух целых чисел.

З-ча **2**. Некоторые из чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равны $+1$, остальные равны -1. Доказать, что

$$2\sin\left(a_1 + \tfrac{a_1a_2}{2} + \tfrac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \tfrac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{2^{n-1}}\right)\tfrac{\pi}{4} = \\ = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + a_3\sqrt{2 + \cdots + a_n\sqrt{2}}}}.$$

В частности, при $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$, имеем:

$$2\sin\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^{n-1}}\right)\tfrac{\pi}{4} = 2\cos\tfrac{\pi}{2^{n+1}} = \\ = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}.$$

Реш **2**. Применим индукцию по n. При $n = 1$ получаем очевидное тождество. Равенство

$$2\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = a_1\frac{\pi}{2} + a_1\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + + \frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}$$

показывает, что

$$\cos 2\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = -\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + + \frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}.$$

Воспользовавшись этой формулой и тождеством $2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{2 - 2\cos\alpha}$, получим

$$2\sin\left(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}\right)\frac{\pi}{4} = \\ = \pm a_1\sqrt{2 + 2\sin\left(a_2 + \frac{a_2a_3}{2} + \cdots + \frac{a_2a_3\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^{n-1}}\right)\frac{\pi}{4}}.$$

Нетрудно также убедиться, что в действительности всегда берётся знак плюс, поскольку знак числа $a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{4} + \cdots + \frac{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_na_{n+1}}{2^n}$ совпадает со знаком числа a_1. Теперь, воспользовавшись предположением индукции, получаем требуемое тождество.

З-ча **3**. Окружность радиуса, равного высоте некоторого правильного треугольника, катится по стороне этого треугольника. Доказать, что дуга, высекаемая сторонами треугольника на окружности, всё время равна $60°$.

Реш **3**. Обозначим угловую величину дуги, высекаемой сторонами данного правильного треугольника ABC, через α. Будем предполагать, что окружность касается стороны BC. Рассмотрим дугу, высекаемую продолжениями сторон треугольника ABC на окружности, и обозначим её угловую величину через α'. Тогда $(\alpha + \alpha')/2 = \angle BAC = 60°$. Но $\alpha = \alpha'$, так как эти дуги симметричны относительно прямой, проходящей через центр окружности параллельно стороне BC. Поэтому $\alpha = \alpha' = 60°$.

IX олимпиада (1946)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Какое наибольшее число острых углов может встретиться в выпуклом многоугольнике?

Реш **1**. Сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Поэтому выпуклый многоугольник не может иметь более трёх тупых внешних углов, т.е. он не может иметь более трёх острых внутренних углов. Три острых угла могут быть, например, в треугольнике.

З-ча **2**. На прямой даны 3 точки A, B, C. На отрезке AB построен равносторонний треугольник ABC_1, на отрезке BC построен равносторонний треугольник BCA_1. Точка M — середина отрезка AA_1, точка N — середина отрезка CC_1. Доказать, что треугольник BMN — равносторонний. (Точка B лежит между точками A и C; точки A_1 и C_1 расположены по одну сторону от прямой AB.)

Реш **2**. При повороте на угол 60° вокруг точки B отрезок CC_1 переходит в отрезок A_1A, поэтому точка N переходит в точку M.

З-ча **3**. Найти четырёхзначное число, которое при делении на 131 даёт в остатке 112, а при делении на 132 дает в остатке 98.

Реш **3**. Ответ: 1946. Пусть N — искомое число. По условию $N = 131k + 112 = 132l + 98$, где k и l — натуральные числа. Кроме того, $N < 10\,000$, поэтому $l = \frac{N-98}{132} < \frac{10\,000-98}{132} \leqslant 75$. Далее, $131k + 112 = 132l + 98$, поэтому $131(k - l) = l - 14$. Следовательно, если $k \neq l$, то $|l - 14| \geqslant 131$. Но $l \leqslant 75$, поэтому $k = l$ и $l - 14 = 0$. Таким образом, $N = 131 \cdot 14 + 112 = 132 \cdot 14 + 98 = 1946$.

З-ча **4**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 9, \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 3, \\ x_4 + x_5 + x_6 &= -3, \\ x_5 + x_6 + x_7 &= -9, \\ x_6 + x_7 + x_8 &= -6, \\ x_7 + x_8 + x_1 &= -2, \\ x_8 + x_1 + x_2 &= 2. \end{cases}$$

Реш **4**. Ответ: $x_1 = -x_8 = 1,\ x_2 = -x_2 = 2,\ x_3 = -x_6 = 3,\ x_4 = -x_5 = 4.$

Сложив все уравнения, получим $3(x_1 + x_2 + \dots + x_8) = 0$. Затем сложим первое уравнение, четвёртое и седьмое. В результате получим $2x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = 1$, а значит, $x_1 = 1$. Остальные неизвестные находятся аналогично.

З-ча **5**. Доказать, что в произведении

$$(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{99} + x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не остаётся членов, содержащих x в нечётной степени.

Реш **5**. Рассматриваемое произведение является многочленом $P(x)$, обладающим следующим свойством: $P(-x) = P(x)$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка A. Доказать, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

Реш **1**. Пусть l — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку A. Отложим на прямой l отрезок AB длины 1. Пусть B' — проекция точки B на плоскость β, O — проекция точки B на линию пересечения плоскостей α и β. Тогда $\sin BAB' = BB' = OB \sin BOB' = \sin BAO \sin BOB'$. При этом $\sin BOB'$ — синус угла между плоскостями α и β; этот угол фиксирован. Поэтому $\sin BAB'$ максимален, когда $\angle BAO = 90^\circ$.

З-ча **2**. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключённый между сторонами угла, делится в точке A пополам.

Реш **2**. Пусть PQ — отрезок, который делится точкой A пополам, $P'Q'$ — другой отрезок, проходящий через точку A. Покажем, что отрезок $P'Q'$ отсекает треугольник большей площади, чем отрезок PQ. Пусть для определённости $P'A \geqslant Q'A$. Отложим на отрезке AP' отрезок $AP'' = AQ'$. Треугольники APP'' и AQQ' равны, а треугольник APP' содержит треугольник APP''. Значит, площадь треугольника APP' больше площади треугольника AQQ'. Разность между площадями треугольников, отсекаемых отрезками $P'Q'$ и PQ, равна разности площадей треугольников APP' и AQQ'.

З-ча **3**. Доказать, что n^2+3n+5 ни при каком целом n не делится на 121.

Реш **3**. Заметим, что $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$. Если число n^2+3n+5 делится на 121, то число $(n+7)(n-4)$ делится на 11. Но $(n+7)-(n-4)=11$, поэтому оба множителя делятся или не делятся на 11 одновременно. Следовательно, если число $(n+7)(n-4)$ делится на 11, то оно делится на 121. Но тогда число $(n+7)(n-4)+33$ не может делиться на 121.

З-ча **4**. Доказать, что для любого натурального n справедливо соотношение:

$$\frac{(2n)!}{n!} = 2^n \cdot (2n-1)!!$$

Реш **4**. Ясно, что $n!2^n = 2\cdot4\cdot6\cdot\dots\cdot2n$. Поэтому $n!2^n(2n-1)!! = (2\cdot4\cdot6\cdot\dots\cdot2n)1\cdot3\cdot5\cdot\dots\cdot(2n-1) = (2n)!$.

З-ча **5**. Доказать, что если α и β — острые углы и $\alpha<\beta$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\beta}.$$

Реш **5**. Возьмём на окружности радиуса 1 с центром O точки K, A и B так, что $\angle AOK=\alpha$ и $\angle BOK=\beta$ (рис.???). Опустим из точки A перпендикуляр AH на прямую OK. Пусть C — точка пересечения этого перпендикуляра и прямой OB. Сравнение площадей сектора OAB и треугольника OAC показывает, что $(\beta-\alpha) < OH\cdot(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha)$. Сравнение площадей сектора OAK и треугольника OAH показывает, что $\alpha > OH\cdot\operatorname{tg}\alpha$. Из двух полученных неравенств следует, что

$$\frac{\beta-\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ т.е. } \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. В шахматном турнире[3] участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. Два семиклассника набрали 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения.

Реш **1**. Пусть x — число восьмиклассников, y — число очков, набранных каждым восьмиклассником. Подсчитывая двумя способами сумму очков, набранных всеми участниками турнира, приходим к уравнению

$$xy+8=\frac{(x+2)(x+1)}{2},$$

т.е.

$$2y=\frac{(x+2)(x+1)-16}{x}=x+3-\frac{14}{x}.$$

Поэтому x принимает одно из значений 1, 2, 7, 14. Значения 1 и 2 отпадают, поскольку в этих случаях число y будет отрицательным. Задача имеет два ответа: $x=7$ и $x=14$.

З-ча **2**. Докажите, что выражение

$$x^5+3x^4y-5x^3y^2-15x^2y^3+4xy^4+12y^5$$

не равно 33 ни при каких целых значениях x и y.

[3]По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает нуль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка.

Реш **2**. Представим данное выражение в виде

$$(x+2y)(x-y)(x+y)(x-2y)(x+3y).$$

При $y \neq 0$ все пять сомножителей этого произведения попарно различны, а число 33 нельзя представить в виде произведения пяти целых попарно различных сомножителей (хотя и можно представить в виде произведения четырёх попарно различных сомножителей, два из которых равны ± 1). При $y = 0$ рассматриваемое выражение превращается в x^5. Ни при каком целом x число x^5 не равно 33.

З-ча **3**. На сторонах угла AOB от вершины O отложены отрезки OA и OB, причем $OA > OB$. На отрезке OA взята точка M, на продолжении отрезка OB — точка N так, что $AM = BN = x$. Найти значение x, при котором отрезок MN имеет наименьшую длину.

Реш **3**. Ответ: $x = \frac{OA-OB}{2}$.

Пусть $AM' = BN' = \frac{OA-OB}{2}$ (тогда $OM' = ON'$). Возьмём произвольную из рассматриваемых точек $M \neq M'$ и покажем, что $MN > M'N'$. Пусть P — точка пересечения $M'N'$ и MN. Продолжим отрезок $M'N'$ за точку M' и отложим на продолжении отрезок $M'Q = N'P$. Треугольники $MM'Q$ и $NN'P$ равны, поэтому $MN = MP + MQ > PQ = M'N'$.

З-ча **4**. Из тридцати пунктов $A_1, A_2, \dots, A_{30}$, расположенных на прямой MN на равных расстояниях друг от друга, выходят тридцать прямых дорог. Эти дороги располагаются по одну сторону от прямой MN и образуют с MN следующие углы:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
α	60°	30°	15°	20°	155°	45°	10°	35°	140°	50°	125°	65°	85°	86°	80°
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
α	75°	78°	115°	95°	25°	28°	158°	30°	25°	5°	15°	160°	170°	20°	158°

Из всех тридцати пунктов выезжают одновременно тридцать автомобилей, едущих, никуда не сворачивая, по этим дорогам с одинаковой скоростью. На каждом из перекрёстков установлено по шлагбауму. Как только первая по времени машина проезжает перекрёсток, шлагбаум закрывается и преграждает путь *всем* следующим машинам, попадающим на этот перекрёсток. Какие из машин проедут все перекрёстки на своём пути, а какие застрянут?

Реш **4**. Ответ: нигде не будут задержаны машины с номерами 14, 23 и 24.

Пусть a_n — дорога, выходящая из пункта A_n, α_n — угол, который образует дорога a_n с прямой MN, P_{mn} — перекрёсток дорог a_n и a_m.

(1) Если машина a_m задерживается на перекрёстке P_{nm}, то угол α_n ближе к 90°, чем угол α_m (дорога a_n *круче*, чем дорога a_m).

(2) Пусть $m < n$. Тогда дороги a_m и a_n пересекаются, если $\alpha_m < \alpha_n$, и не пересекаются, если $\alpha_m \geqslant \alpha_n$.

(3) Если все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n, то машина a_n нигде не задержится. Это следует из (1).

(4) Пусть a_m — самая крутая из дорог, пересекающих a_n. Если a_m круче a_n, то a_m не может быть задержана раньше перекрёстка P_{nm}. Действительно, предположим, что машина a_m задерживается на перекрёстке P_{qm}, лежащем на отрезке $A_m P_{mn}$. Тогда согласно (1) дорога a_q круче дороги a_m, а значит, по условию она не может пересекать a_n. Покажем, что это невозможно. Рассмотрим сначала случай, когда точка A_q лежит вне отрезка $A_n A_m$. Прямая a_q пересекает сторону $A_m P_{nm}$ треугольника $A_m P_{nm} A_n$ и не пересекает сторону $A_m A_n$, поэтому она пересекает сторону $P_{nm} A_n$, а этого не может быть. Рассмотрим теперь случай, когда точка A_q лежит внутри отрезка $A_n A_m$. Пусть сначала $n < q < m$. Дороги a_n и a_m, a_q и a_m пересекаются, а дороги a_q и a_n не пересекаются. Поэтому из (2) следует, что $\alpha_q \leqslant \alpha_n < \alpha_m$. Угол α_m ближе к 90°, чем угол α_n, поэтому неравенство $\alpha_n < \alpha_m$ возможно лишь при $\alpha_n < 90°$. Но тогда из неравенства $\alpha_q \leqslant \alpha_n$ следует, что дорога a_q не более крута, чем дорога a_n, что противоречит условию. Случай $n > q > m$ рассматривается аналогично.

(5) Если машина a_n проходит через все перекрёстки, то все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n; это следует из (4) и (1).

Итак, из (3) и (5) следует, что машина a_n проходит через все перекрёстки тогда и только тогда, когда все дороги, пересекающие a_n, менее круты, чем дорога a_n. Теперь уже легко получить требуемый результат.

З-ча **5**. Автобусная сеть города устроена следующим образом: 1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом единственная, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте ровно три остановки.

Сколько автобусных маршрутов в городе?

Реш **5**. О т в е т : 7. Докажем, что если выполняются указанные условия, то число остановок n и число маршрутов N связаны соотношением $N = n(n-1)+1$. Пусть a — один из маршрутов, B — остановка, через которую маршрут a не проходит. Каждый маршрут, проходящий через B, пересекает маршрут a. Поэтому через B проходит ровно n маршрутов. Аналогично доказывается, что через каждую остановку маршрута a проходит $n-1$ маршрутов, отличных от a. Всего получаем $n(n-1)$ разных маршрутов и ещё сам маршрут a.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В шахматном турнире участвовали ученики IX и X классов. Десятиклассников было в 10 раз больше, чем девятиклассников, и они набрали вместе в $4,5$ раза больше очков, чем все девятиклассники. Сколько очков набрали девятиклассники? Найти все решения.

Реш **1**. Пусть в турнире участвовало x девятиклассников. Тогда всего было $11x$ участников и они набрали $\dfrac{11x(11x-1)}{2}$ очков. По условию отношение числа очков, набранных девятиклассниками, к числу очков, набранных десятиклассниками, равно $1:4,5$. Поэтому девятиклассники набрали $x(11x-1)$ очков, а значит, каждый из девятиклассников выиграл все $11x-1$ партий, которые он сыграл. Но если бы среди участников турнира было два девятиклассника, то партию между собой они должны были оба выиграть, что невозможно. Поэтому в турнире участвовал один девятиклассник; он набрал 10 очков.

З-ча **2**. Дан ряд чисел: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... , в котором каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Найдется ли среди первых ста миллионов одного (10^8+1) членов этого ряда число, оканчивающееся четырьмя нулями?

Реш **2**. О т в е т : Да, найдётся. Заменим каждое из данных чисел его остатком от деления на 1000. Пусть $a_1 = 0$, a_2, ... — полученные в результате числа. Если нам известны числа a_k и a_{k+1}, то нам известно и a_{k-1}, поскольку в исходной последовательности $(k-1)$-й член равен разности $(k+1)$-го и k-го. Следовательно, если для некоторых k и n имеют место равенства $a_k = a_{k+n}$ и $a_{k+1} = a_{k+n+1}$, то тогда $a_{k-1} = a_{k+n-1}$, $a_{k-2} = a_{k+n-2}$, ... , $a_1 = a_{n+1}$. Но $a_1 = 0$, поэтому $a_{n+1} = 0$, т.е. в исходной последовательности чисел на $(n+1)$-м месте стоит число, оканчивающееся четырьмя нулями.

Остаётся доказать, что среди пар (a_1, a_2), (a_2, a_3), ... , (a_{10^8}, a_{10^8+1}), (a_{10^8+1}, a_{10^8+2}) найдутся две одинаковые пары. Но из чисел 0, 1, 2, ... , 9999 нельзя составить более 10^8 различных пар, а мы рассматриваем 10^8+1 пар.

З-ча **3**. На сторонах PQ, QR, RP треугольника PQR отложены отрезки AB, CD, EF. Внутри треугольника задана точка S_0. Найти геометрическое место точек S, лежащих внутри треугольника PQR, для которых сумма площадей треугольников SAB, SCD, SEF равна сумме площадей треугольников S_0AB, S_0CD, S_0EF. Рассмотреть особый случай, когда

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{CD}{QR} = \frac{EF}{RP}.$$

Реш **3**. Будем считать, что $\frac{AB}{PQ} \geqslant \frac{CD}{QR} \geqslant \frac{EF}{RP}$. Отложим на сторонах QR и PR отрезки $QD' = CD \cdot \frac{PQ}{AB}$ и $PE' = FE \cdot \frac{PQ}{AB}$. Тогда

$$S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SCD} + S_{\Delta SEF} = \frac{AB}{PQ}\left(S_{\Delta SPQ} + S_{\Delta SQD'} + S_{\Delta SE'P}\right) =$$
$$= \frac{AB}{PQ}\left(S_{PQD'E'} \pm S_{\Delta SD'E'}\right).$$

В последнем выражении знак плюс берётся, если точка S лежит вне четырёхугольника $PQD'E'$, а знак минус — если внутри. Из полученной формулы следует, что для точек S искомого геометрического места площадь треугольника $SD'E'$ должна быть постоянной. Поэтому искомое ГМТ — отрезок прямой, параллельной $D'E'$ и проходящей через точку S_0. В особом случае искомое ГМТ — весь треугольник PQR.

З-ча **4**. В городе 57 автобусных маршрутов. Известно, что:

1) с любой остановки на любую другую остановку можно попасть без пересадки;

2) для любой пары маршрутов найдется, и притом только одна, остановка, на которой можно пересесть с одного из этих маршрутов на другой;

3) на каждом маршруте не менее трёх остановок.

Сколько остановок имеет каждый из 57 маршрутов?

Реш **4**. Ответ: 8. Докажем, что если выполняются указанные условия, то число остановок n и число маршрутов N связаны соотношением $N = n(n-1)+1$. Прежде всего покажем, что если на каком-то маршруте n остановок, то на любом другом маршруте тоже n остановок, а кроме того, через каждую остановку проходит n маршрутов. Возьмём остановку B, через которую не проходит рассматриваемый маршрут a. Из B есть маршрут в каждую из n остановок маршрута a, причём такой маршрут ровно один, поскольку два разных маршрута не могут иметь двух общих остановок. Каждый маршрут, проходящий через B, пересекает маршрут a. Поэтому через B проходит ровно n маршрутов. Теперь ясно, что маршрут b, не проходящий через остановку B, имеет ровно n остановок. Действительно, через B проходит ровно n маршрутов, каждый из которых пересекает b в одной точке, два маршрута не могут пересекать b в одной и той же точке, и через каждую остановку маршрута b проходит один из этих маршрутов. Теперь видно, что через каждую остановку проходит n маршрутов. В частности, через каждую остановку маршрута a проходит $n-1$ маршрутов, отличных от самого a. Всего получаем $n(n-1)$ разных маршрутов и ещё сам маршрут a.

З-ча **5**. См. задачу 4 для 7 — 8 классов.

X олимпиада (1947)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Определить коэффициенты, которые будут стоять при x^{17} и x^{18} после раскрытия скобок и приведения подобных членов в выражении

$$(1 + x^5 + x^7)^{20}.$$

Реш **1**. Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при x^{18} будет равен нулю.

Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом: $17 = 7+5+5$; с точностью до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 выражений $1+x^5+x^7$ мы должны выбрать x^7, а в двух из 19 оставшихся таких выражений мы должны выбрать x^5. Поэтому коэффициент при x^{17} равен $20 \cdot \frac{19 \cdot 18}{2} = 3420$.

З-ча **2**. Какой остаток даёт $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ при делении на $(x - 1)$?

Реш **2**. Ответ: 6. Пусть $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = P(x)(x - 1) + r$. Положив $x = 1$, получим $r = 6$.

З-ча **3**. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ есть хотя бы одно число взаимно простое с остальными четырьмя из этих чисел.

Реш **3**. Если $|k - l| \leqslant 4$ и $k \neq l$, то наибольший общий делитель чисел k и l не превосходит 4. Поэтому наибольший общий делитель любой пары выбранных чисел не превосходит 4. Из пяти последовательных чисел можно выбрать пару последовательных нечётных чисел. Из двух последовательных нечётных чисел по крайней мере одно не делится на 3. Это число взаимно просто с остальными четырьмя числами.

З-ча **4**. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Сторонами, противоположными вершинам A, B, C, D, E, мы называем соответственно отрезки CD, DE, EA, AB, BC. Докажите, что если произвольную точку M, лежащую внутри пятиугольника, соединить прямыми со всеми его вершинами, то из этих прямых либо ровно одна, либо ровно три, либо ровно пять пересекают стороны пятиугольника, противоположные вершинам, через которые они проходят.

Реш **4**. Проведём диагонали данного пятиугольника. Они разбивают его на 11 областей: один пятиугольник, 5 внутренних треугольников (сторонами которых служат диагонали) и 5 внешних треугольников (одной из сторон каждого из которых служит сторона пятиугольника). Если точка M принадлежит внешнему треугольнику, то число требуемых прямых равно 1, если M принадлежит внутреннему треугольнику, то число прямых равно 3, а если пятиугольнику, то число прямых равно 5.

З-ча **5**. Точка O является точкой пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Докажите, что 3 окружности, проходящие: первая через точки O, A, B, вторая — через точки O, B, C и третья — через точки O, C, A, равны между собой.

Реш **5**. Легко проверить, что $\angle AOB = 90^\circ + \angle C$. Поэтому радиус описанной окружности треугольника AOB равен $\frac{1}{2}AB \sin \angle AOB = \frac{1}{2}AB \sin \angle C = R$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC. Радиусы остальных рассматриваемых окружностей тоже равны R.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В каком из выражений:

$$(1 - x^2 + x^3)^{1000}, \quad (1 + x^2 - x^3)^{1000}$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов больший коэффициент при x^{20}?

Реш **1**. Ответ: в выражении $(1 + x^2 - x^3)^{1000}$. Пусть $P(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1000}$ и $Q(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}$. Коэффициент при x^{20} у многочлена $P(x)$ такой же, как у многочлена $P(-x) = (1 - x^2 - x^3)^{1000}$, а у многочлена $Q(x)$ такой же, как у многочлена $Q(-x) = (1 + x^2 + x^3)^{1000}$. Ясно, что у многочлена $(1 + x^2 + x^3)^{1000}$ коэффициент при x^{20} больше, чем у многочлена $(1 - x^2 - x^3)^{1000}$.

З-ча **2**. Вычислить с недостатком с пятью десятичными знаками (т.е. с точностью до 0, 00001) произведение:

$$\left(1 - \frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{10^{99}}\right).$$

Докажите точность полученных знаков.

Реш **2**. О т в е т : 0, 89001.

Пусть $a = \left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{10^5}\right)$ и $b = \left(1-\frac{1}{10^6}\right)\dots\left(1-\frac{1}{10^{99}}\right)$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$0,89001 + \frac{1}{10^6} < a < 0,89001 + \frac{2}{10^6}.$$

Ясно, что $b < 1 - \frac{1}{10^6}$. Кроме того, если $0 < x, y < 1$, то $(1-x)(1-y) > 1-x-y$. Поэтому $b > 1 - \frac{1}{10^6} - \frac{1}{10^7} - \dots - \frac{1}{10^{99}} > 1 - \frac{2}{10^6}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} ab < 0,890012 \cdot 0,999999 &< 0,890012, \\ ab > 0,890011 \cdot 0,999998 &> 0,890009. \end{aligned}$$

З-ча **3**. Докажите, что каково бы ни было целое число n, среди чисел $n, n+1, n+2, \dots, n+9$ есть число, хотя бы одно, взаимно простое с остальными девятью из этих чисел.

Реш **3**. Среди данных чисел есть 5 нечётных чисел. Рассмотрим остатки от деления этих пяти чисел на 3, 5 и 7. Среди остатков от деления на 3 нет трёх одинаковых, а среди остатков от деления на 5 и на 7 нет двух одинаковых. Поэтому среди указанных пяти чисел можно выбрать три числа, не делящихся на 3, а среди них выбрать число, не делящееся на 5 и на 7. Это число взаимно просто с остальными девятью числами.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 — 8 классов.

З-ча **5**. Найти все прямые в пространстве, проходящие через данную точку M на данном расстоянии d от данной прямой AB.

Реш **5**. О т в е т : прямые, лежащие в двух плоскостях, касающихся цилиндра радиуса d с осью AB и проходящих через точку M, за исключением прямой, параллельной AB (если точка M расположена на расстоянии d от прямой AB, то касательная плоскость будет одна и прямую исключать при этом не нужно). Прямые, удалённые на расстояние d от прямой AB, — это в точности прямые, касающиеся указанного цилиндра. Если из этих прямых выбрать те, которые проходят через точку M, то получим указанное в ответе множество.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Некоторые из 20 металлических кубиков, одинаковых по размерам и внешнему виду, алюминиевые, остальные[4] дюралевые (более тяжёлые). Как при помощи 11 взвешиваний на весах с 2-мя чашечками без гирь определить число дюралевых кубиков?

Реш **1**. Положим на чашечки весов по одному кубику. Возможны два случая.

Случай 1. *При первом взвешивании один из кубиков оказался тяжелее.*

В этом случае один выбранный кубик алюминиевый, а другой дюралевый. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем с ними сравнивать остальные кубики. А именно, оставшиеся 18 кубиков разбиваем на 9 пар и поочерёдно кладём их на другую чашечку. Каждый раз мы узнаём, сколько в паре дюралевых кубиков. Действительно, если эталонная пара легче, то мы положили два дюралевых кубика; если эталонная пара имеет тот же самый вес, то мы положили один алюминиевый и один дюралевый кубик; если эталонная пара тяжелее, то мы положили два алюминиевых кубика. Таким образом, в первом случае достаточно 10 взвешиваний.

Случай 2. *При первом взвешивании кубики оказались равного веса.*

В этом случае либо оба выбранных кубика алюминиевые, либо оба дюралевые. Положим выбранные кубики на одну чашечку и будем последовательно с ними сравнивать остальные кубики. Пусть первые k пар оказались того же самого веса, а $(k+1)$-я пара оказалась другого веса. (Если $k = 9$, то все кубики одного веса, поэтому дюралевых кубиков нет.) Пусть для определённости $(k+1)$-я пара оказалась более тяжёлой. Тогда первые два кубика и кубики первых k пар алюминиевые. Положим на каждую чашу весов

[4] Предполагается, что все кубики могут быть алюминиевыми, но они не могут быть все дюралевыми (если все кубики окажутся одного веса, то нельзя выяснить, алюминиевые они или дюралевые) — прим. ред.

по одному кубику $(k+1)$-й пары. Если эти кубики одного веса, то они оба дюралевые. Если кубики разного веса, то один алюминиевый, а другой дюралевый. В обоих случаях мы можем составить пару кубиков, один из которых алюминиевый, а другой дюралевый. Оставшиеся пары кубиков мы можем сравнивать с этой парой, как и в первом случае. Общее число взвешиваний во втором случае равно 11.

З-ча **2**. Докажите, что выпуклый 13-тиугольник нельзя разрезать на параллелограммы.

Реш **2**. У выпуклого многоугольника с нечётным числом сторон есть сторона, не параллельная ни одной из остальных его сторон, поскольку параллельные стороны выпуклого многоугольника разбиваются на пары. А если многоугольник можно разрезать на параллелограммы, то для каждой его стороны найдётся сторона, ей параллельная.

З-ча **3**. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... , 199, 200 произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

Реш **3**. Рассмотрим наибольшие нечётные делители выбранных чисел. У чисел от 1 до 200 есть ровно 100 различных наибольших нечётных делителей (числа 1, 3, ... , 199). Итак, два из выбранных чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители. Это означает, что два выбранных числа отличаются только тем, что множитель 2 входит в них в разных степенях. Большее из них делится на меньшее.

З-ча **4**. Расположите[5] 4 точки так, чтобы при измерении всех попарных расстояний между ними получалось только два различных числа. Отыщите все такие расположения.

Реш **4**. Требуемые расположения изображены на рис.???. Всего получаем 6 различных вариантов. Чтобы найти все эти варианты, будем поочерёдно разбирать случаи, когда есть 1 отрезок одной длины и 5 отрезков другой длины, 2 отрезка одной длины и 4 отрезка другой длины, 3 отрезка одной длины и 3 отрезка другой длины. Во втором случае отрезки равной длины могут либо иметь общую вершину (рис. б и в), либо не иметь общих вершин (рис. г). В третьем случае отрезки равной длины могут либо образовывать правильный треугольник (рис. д), либо не образовывать правильный треугольник (рис. е). Для варианта (е) несложные вычисления с углами показывают, что искомые точки — это четыре из пяти вершин правильного пятиугольника.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В треугольной пирамиде все 4 грани имеют одинаковую площадь. Докажите, что они равны.

Реш **1**. Проведём через прямую AB плоскость, параллельную прямой CD. Пусть C' и D' — проекции точек C и D на эту плоскость. Покажем, что прямая AB делит отрезок $C'D'$ пополам. Действительно, проекция тетраэдра $ABCD$ на плоскость, перпендикулярную прямой AB, представляет собой равнобедренный треугольник, поскольку две его стороны равны высотам (равновеликих) треугольников ACB и ADC, опущенных из вершин C и D на сторону AB. Аналогично доказывается, что прямая CD делит пополам проекцию ребра AB на плоскость, проходящую через прямую CD параллельно прямой AB. Таким образом, $AC'BD'$ — параллелограмм. Из равенства $BC' = AD'$ следует равенство $BC = AD$. Равенства длин остальных пар противоположных рёбер доказываются аналогично.

З-ча **2**. k проволочных треугольников расположены в пространстве так, что:

1) каждые 2 из них имеют ровно одну общую вершину,

2) в каждой вершине сходится одно и то же число p треугольников.

Найдите все значения k и p, при которых указанное расположение возможно.

Реш **2**. О т в е т : $(k, p) = (1, 1)$, $(4, 2)$ или $(7, 3)$.

Сначала докажем, что $p \leqslant 3$. Предположим, что $p \geqslant 4$. Возьмём треугольник Δ_1. К его вершине A примыкает треугольник Δ_2. К вершине $B \neq A$ треугольника Δ_2 примыкают треугольники Δ_3, Δ_4, Δ_5; все они отличны от Δ_1, поскольку иначе треугольники Δ_1 и Δ_2 имели бы две общие вершины. По условию каждый из треугольников Δ_3, Δ_4, Δ_5 имеет общую вершину с треугольником Δ_1, причём эта вершина отлична от A. Но из этого следует, что два из треугольников Δ_3, Δ_4, Δ_5 имеют общую вершину, отличную от B.

Если $p = 1$, то $k = 1$ (если бы было хотя бы 2 треугольника, то они имели бы общую вершину, а тогда $p \geqslant 2$).

Пусть в каждой вершине сходятся $p \geqslant 2$ треугольников. Фиксируем один из треугольников. К каждой его вершине примыкает $p - 1$ треугольников, т.е. всего к нему примыкает $3(p - 1)$ треугольников. Все эти треугольники различны, и других треугольников нет, поскольку любые два треугольника должны иметь общую вершину. Значит, всего получаем $3(p - 1) + 1 = 3p - 2$ треугольников.

[5] На плоскости — прим. ред.

Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k,p)=(4,2)$, можно взять октаэдр и выбросить половину его граней, оставив только треугольники, не имеющие общих сторон. Чтобы построить конфигурацию, для которой $(k,p)=(7,3)$, можно взять тетраэдр, поместить внутрь его треугольник ABC и для каждой вершины треугольника ABC взять треугольник, образованный этой вершиной и одним из двух несмежных рёбер тетраэдра (для каждой вершины треугольника ABC берётся своя пара несмежных рёбер тетраэдра).

З-ча **3**. В числовом треугольнике каждое число равно сумме трёх чисел предыдущей строки:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}$$

Докажите, что в каждой строке, начиная с 3-й, найдутся чётные числа.

Реш **3**. Выпишем в каждой строке, начиная с третьей, первые четыре числа, заменив каждое чётное число на 0, а нечётное — на 1:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
. & . & . & . & & & &
\end{array}$$

Пятая выписанная строка совпала с первой, поэтому в дальнейшем первые четыре числа будут периодически повторяться. Остаётся заметить, что в каждой из первых пяти выписанных строк есть чётные числа.

З-ча **4**. Из двухсот чисел: 1, 2, 3, ... , 199, 200 выбрали одно число, меньшее 16, и ещё 99 чисел. Докажите, что среди выбранных чисел найдётся хотя бы 2 таких, что одно из них делится на другое.

Реш **4**. Предположим, что из чисел 1, 2, 3, ... , 199, 200 мы выбрали 100 чисел так, что ни одно из них не делится на другое. Достаточно доказать, что среди выбранных чисел нет чисел, меньших 16. Рассмотрим наибольшие нечётные делители всех выбранных чисел. Если наибольшие нечётные делители двух чисел совпадают, то одно из них делится на другое. Поэтому наибольшие нечётные делители выбранных чисел — это в точности все числа 1, 3, 5, ... , 199. В частности, среди выбранных чисел есть числа с наибольшими нечётными делителями 1, 3, 9, 27 и 81. Ни одно из выбранных чисел не делится на другое, поэтому выбранное число с наибольшим нечётным делителем 27 делится на 2, с наибольшим нечётным делителем 9 делится на 2^2, с наибольшим нечётным делителем 3 делится на 2^3, с наибольшим нечётным делителем 1 делится на 2^4. Следовательно, среди выбранных чисел нет чисел 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 12. Далее, рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 5, 15 и 45, убеждаемся, что среди выбранных чисел нет чисел 5, 10 и 15; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 7, 21 и 63, убеждаемся, что нет чисел 7 и 14; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 11 и 33, убеждаемся, что нет числа 11; рассматривая выбранные числа с наибольшими нечётными делителями 13 и 39, убеждаемся, что нет числа 13.

З-ча **5**. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ лежит выпуклый четырёхугольник $A_5A_6A_7A_8$. Внутри $A_5A_6A_7A_8$ выбрана точка A_9. Докажите, что из этих девяти точек можно выбрать 5 точек, расположенных в вершинах выпуклого пятиугольника.

Реш **5**. Предположим, что требуемого выпуклого пятиугольника нет. Проведём из точки A_9 лучи через точки A_5, A_6, A_7, A_8. Эти лучи разбивают плоскость на 4 угла, каждый из которых меньше 180°. Если внутри одного из этих углов лежат две из точек A_1, A_2, A_3, A_4, то мы немедленно получаем требуемый пятиугольник. Поэтому внутри каждого из этих углов лежит ровно одна из указанных точек. Но тогда внутри каждого из двух углов, образованных лучами A_9A_5 и A_9A_7, лежат две из указанных точек. Рассмотрев тот из углов, который меньше 180°, снова получаем требуемый пятиугольник.

XI олимпиада (1948)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Сумма обратных величин трёх целых положительных чисел равна 1. Каковы эти числа? Найти все решения.

Реш **1**. Ответ: $(2,4,4)$, $(2,3,6)$ или $(3,3,3)$.

Пусть $x \leqslant y \leqslant z$ — натуральные числа, причём $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Тогда $x<4$, поскольку иначе $x,y,z \geqslant 4$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{4} < 1$.

Если $x=2$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$. Значит, $y \leqslant 4$ и мы находим два решения $(2,4,4)$ и $(2,3,6)$.

Если $x=3$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$. Значит, $y \leqslant 3$ и мы находим решение $(3,3,3)$.

З-ча **2**. Сколько цифр имеет число 2^{100}?

Реш **2**. Ответ: 31 цифру. Ясно, что $2^{100}=(1024)^{10}>1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет не меньше 31 цифры. С другой стороны,

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{41}{40}\cdot\frac{40}{39}\cdot\frac{39}{38}\cdots\frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10;$$

Таким образом, $2^{100}=(1024)^{10}<10\cdot 1000^{10}$, поэтому число 2^{100} имеет меньше 32 цифр.

З-ча **3**. На плоскости проведено n прямых линий. Доказать, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно так закрасить двумя красками (каждая область закрашивается только одной краской), что никакие две соседние области (т.е. области, соприкасающиеся только по отрезку прямой) не будут закрашены одной и той же краской.

Реш **3**. Применим индукцию по n. При $n=1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для любой конфигурации из n прямых. Рассмотрим конфигурацию из $n+1$ прямых, выбросим одну прямую и раскрасим требуемым способом плоскость, разбитую оставшимися n прямыми. По одну сторону от выброшенной прямой эту раскраску мы сохраним, а по другую сторону — заменим на противоположную.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Если число $\frac{2^n-2}{n}$ — целое, то и число $\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1}$ — целое. Доказать.

Реш **1**. Пусть $2^n-2=nm$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{2^{2^n-1}-2}{2^n-1} &= 2\frac{2^{2^n-2}-1}{2^n-1} = \frac{2^{nm}-1}{2^n-1} = \\ &= 2(2^{n(m-1)}+2^{n(m-2)}+\dots+2^n+1).\end{aligned}$$

З-ча **2**. Доказать без помощи таблиц, что

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2.$$

Реш **2**. Пусть $\log_2\pi=a$ и $\log_5\pi=b$. Тогда $2^a=\pi$ и $5^b=\pi$, т.е. $\pi^{1/a}=2$ и $\pi^{1/b}=5$. Поэтому $\pi^{1/a+1/b}=2\cdot5=10$. Учитывая, что $\pi^2<10$, получаем требуемое.

З-ча **3**. Даны две треугольные пирамиды $ABCD$ и $A'BCD$ с общим основанием BCD, причем точка A' лежит внутри пирамиды $ABCD$. Доказать, что сумма плоских углов при вершине A' пирамиды $A'BCD$ больше суммы плоских углов при вершине A пирамиды $ABCD$.

Реш **3**. Докажем сначала требуемое утверждение в случае, когда точка A' лежит на ребре AB. Ясно, что $\angle BA'C=\angle BAC+\angle ACA'$ и $\angle BA'D=\angle BAD+\angle ADA'$. Поэтому требуемое неравенство можно преобразовать к виду $\angle ACA'+\angle CA'D+\angle ADA'>\angle CAD$. Учитывая, что $\angle CA'D=180^\circ-\angle A'CD-\angle A'DC$ и $\angle CAD=180^\circ-\angle ACD-\angle ADC$, переходим к неравенству $\angle ACA'+\angle ACD+\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'CD+\angle A'DC$. Это неравенство следует из хорошо известных неравенств для трёхгранных углов: $\angle ACA'+\angle ACD>\angle A'CD$ и $\angle ADC+\angle ADA'>\angle A'DC$.

Теперь требуемое неравенство легко доказывается и в общем случае. Для этого сначала рассмотрим точку A_1, в которой плоскость $A'CD$ пересекает ребро AB. Затем рассмотрим точку A_2, к которой прямая CA' пересекает отрезок A_1D. Применив последовательно доказанное неравенство к точкам A_1, A_2 и A', получим требуемое.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Решить в натуральных числах уравнение $x^y = y^x$ $(x \neq y)$. Найти все решения.

Реш **1**. Ответ: $x = 2$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 2$. Из равенства $x^y = y^x$ следует, что простые делители чисел x и y одни и те же, т.е. $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ и $y = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{n_n}$. То же самое равенство показывает, что $a_1 y = b_1 x$, ..., $a_n y = b_n x$. Пусть для определённости $x < y$. Тогда из записанных равенств следует, что $a_1 < b_1$, ..., $a_n < b_n$, т.е. $y = kx$, где k — целое число. Подставляя равенство $y = kx$ в исходное равенство $x^y = y^x$, получаем $x^{kx} = (kx)^x$. Извлекая корень степени x, получаем $x^k = kx$, т.е. $x^{k-1} = k$. По предположению $y > x$, поэтому $k > 1$, а значит, $x > 1$. Ясно, что $2^{2-1} = 2$. Легко также проверить, что если $x > 2$ или $k > 2$, то $x^{k-1} > k$.

З-ча **2**. Доказать, что в любом треугольнике имеет место неравенство: $R \geqslant 2r$ (R и r — радиусы описанного и вписанного кругов соответственно), причем равенство $R = 2r$ имеет место только для правильного треугольника.

Реш **2**. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, AC и AB соответственно. При гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом гомотетии $-1/2$ описанная окружность S треугольника ABC переходит в описанную окружность S_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Так как окружность S_1 пересекает все стороны треугольника ABC, то можно построить треугольник $A'B'C'$ со сторонами, параллельными сторонам треугольника ABC, для которого S_1 будет вписанной окружностью. Пусть r и r' — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$; R и R_1 — радиусы окружностей S и S_1. Ясно, что $r \leqslant r' = R_1 = R/2$. Равенство достигается, если треугольники $A'B'C'$ и ABC совпадают, т.е. S_1 — вписанная окружность треугольника ABC. В этом случае $AB_1 = AC_1$, поэтому $AB = AC$. Аналогично $AB = BC$.

З-ча **3**. Может ли фигура иметь более одного, но конечное число центров симметрии?

Реш **3**. Ответ: нет, не может. Прежде всего заметим, что если O_1 и O_2 — центры симметрии фигуры, то точка $O_3 = S_{O_2}(O_1)$ (т.е. точка, симметричная точке O_1 относительно точки O_2) тоже является центром симметрии. Это следует из равенства $S_{O_3} = S_{O_2} \circ S_{O_1} \circ S_{O_2}$, которое легко проверяется. Действительно, пусть $A_1 = S_{O_2}(A)$, $A_2 = S_{O_1}(A_1)$, $A_3 = S_{O_2}(A_2)$. Тогда $AA_2A_1A_3$ — параллелограмм с центром O_2. Точка O_1 является серединой стороны A_1A_2, поэтому точка O_3 является серединой отрезка AA_3. Предположим, что фигура имеет более одного, но конечное число центров симметрии. Выберем прямую так, чтобы при проекции на неё не все центры симметрии отображались в одну точку. Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии, проекции которых являются крайними точками (все остальные проекции центров симметрии заключены между ними). Тогда точка O_3, симметричная точке O_1 относительно точки O_2, не является центром симметрии. Приходим к противоречию.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Найти все рациональные положительные решения уравнения $x^y = y^x$ $(x \neq y)$.

Реш **1**. Пусть $y = kx$. Тогда $x^{kx} = (kx)^x$. Извлекая корень степени x, а затем деля на x, получаем $x^{k-1} = k$. Таким образом, $x = k^{\frac{1}{k-1}}$ и $y = kk^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}}$. Число k рационально; пусть $\frac{1}{k-1} = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Подставляя это выражение в формулы для x и y, получаем $x = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}$ и $y = \left(\frac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}}$. Числа p и q взаимно просты, поэтому числа x и y могут быть рациональными лишь в том случае, когда из целых чисел p и $p+q$ можно извлечь корень степени q. Но если $q \geqslant 2$ и $p = n^q$, то

$$n^q < p + q < (n+1)^q = n^q + qn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2}n^{q-2} + \dots$$

Поэтому $q = 1$, а значит, $x = \left(\frac{p+1}{p}\right)^p$ и $y = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+1}$; здесь p — произвольное целое число, отличное от 0 и -1.

З-ча **2**. Поместить в куб окружность наибольшего возможного радиуса.

Реш **2**. Пусть a — длина ребра куба. Сечение куба плоскостью, проходящей через его центр ортогонально одной из диагоналей, является правильным шестиугольником. Радиус вписанной окружности этого шестиугольника равен $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, поэтому в куб можно поместить окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Покажем, что окружность большего радиуса в куб поместить нельзя. Прежде всего заметим, что достаточно ограничиться рассмотрением окружностей с центром в центре куба. Действительно, если окружность радиуса R содержится в кубе, то окружность, симметричная ей относительно центра куба, тоже содержится в кубе. Но тогда из выпуклости куба следует, что окружность радиуса R, центр которой совпадает с центром куба, а сама она расположена в плоскости, параллельной плоскости исходной окружности, тоже содержится в кубе.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в центре куба и шар того же радиуса и с тем же центром. Нас интересует лишь случай, когда $R > a/2$ и рассматриваемая окружность лежит внутри куба. В этом случае вне куба находятся шесть шаровых сегментов. Радиусы окружностей, лежащих в их основаниях, равны $r = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$, поэтому r возрастает при возрастании R. Рассмотрим конусы, вершины которых находятся в центре куба, а основаниями служат окружности оснований шаровых сегментов. Если плоскость Π, содержащая рассматриваемую окружность, пересекает один из этих конусов, то часть окружности проходит по шаровому сегменту, а потому частично лежит вне куба. Таким образом, нужно доказать, что если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$, то плоскость Π пересекает один из конусов. Плоскость Π разбивает лучи, выходящие из центра куба и направленные в середины граней, на две тройки (каждая тройка лежит по одну сторону от плоскости Π). Рассмотрим плоскость Π', которая проходит через центр куба перпендикулярно одной из диагоналей и разбивает эти лучи на те же самые две тройки. В плоскости Π' есть окружность радиуса $\frac{a\sqrt{6}}{4}$, целиком лежащая внутри куба. Легко проверить, что плоскость Π' касается трёх конусов (соответствующих тройке лучей, которые являются осями этих конусов) по трём лучам OX, OY, OZ. Лучи OX, OY, OZ лежат строго внутри конусов, соответствующих окружности радиуса $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Значит, эти лучи лежат по одну сторону от плоскости Π, поскольку оси соответствующих конусов лежат по одну сторону от этой плоскости. Плоскости Π и Π' имеют общую точку (центр куба), поэтому они пересекаются по некоторой прямой. Лучи OX, OY и OZ образуют друг с другом углы в 120°, поэтому никакая прямая не может разделить плоскость Π' так, чтобы эти лучи лежали в одной полуплоскости. Таким образом, плоскость Π' пересекает один из конусов, если $R > \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

З-ча **3**. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x| + |y| < 100$?

Реш **3**. О т в е т : 338 350. Уравнения $|x| + |y| = 0$, $|x| + |y| = 1$, $|x| + |y| = 2, \ldots, |x| + |y| = 99$ имеют, соответственно, $1, 2^2, 3^2, \ldots, 100^2$ целочисленных решений. Поэтому искомое число равно $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6}$.

З-ча **3**. Каково наибольшее возможное число лучей в пространстве, выходящих из одной точки и образующих попарно тупые углы?

Реш **3**. О т в е т : 4. Будем рассматривать вместо лучей векторы. Можно считать, что первый вектор имеет координаты $(1, 0, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_i < 0$. Можно считать, что второй вектор имеет координаты $(x_2, 1, 0)$. Тогда остальные векторы имеют координаты (x_i, y_i, z_i), где $x_2x_i + y_i < 0$. Числа x_2 и x_i отрицательные, поэтому $x_2x_i > 0$, а значит, $y_i < 0$. При $i, j > 2$ имеет место неравенство $x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j < 0$. Но $x_ix_j > 0$ и $y_iy_j > 0$, поэтому $z_iz_j < 0$, т.е. числа z_i и z_j разного знака. Таких чисел не может быть больше двух.

XII олимпиада (1949)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Показать, что

$$27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

делится без остатка на 26460.

Реш **1**. Заметим, что $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$. Представим число $A = 27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ в виде $27195^8 - (10887^8 - 10152^8)$. Это число делится на $5 \cdot 7^2$. Действительно, $27195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$, а разность $10887^8 - 10152^8$ делится на $10887 - 10152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$. С другой стороны, представление $A = (27195^8 - 10887^8) + 10152^8$ показывает, что число A делится на $2^2 \cdot 3^3$. Действительно, $27195^8 - 10887^8$ делится на $27195 - 10887 = 16308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 151$, а $10152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$. Таким образом, число A делится на $5 \cdot 7^2$ и на $2^2 \cdot 3^3$, поэтому оно делится на $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$.

З-ча **2**. Доказать, что если многоугольник имеет несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

Реш **2**. Любая ось симметрии многоугольника проходит через его центр масс (центр масс вершин многоугольника, в которые помещены одинаковые массы). Действительно, при симметрии относительно оси симметрии центр масс переходит сам в себя.

З-ча **3**. Доказать, что равенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

для целых x, y и z возможно только при $x = y = z = 0$.

Реш **3**. Предположим, что $x = 2^m x_1,\ y = 2^n y_1,\ z = 2^k z_1$, где числа x_1, y_1, z_1 нечётны. Можно считать, что $m \leqslant n \leqslant k$. Тогда обе части уравнения можно сократить на $(2^m)^2$. В результате получим

$$x_1^2 + 2^{(n-m)} y_1^2 + 2^{(k-m)} z_1^2 = 2^{n+k-m+1} x_1 y_1 z_1,$$

где $n + k - m + 1 \geqslant 1$.

Если $n = m = k$, то при делении на 4 число в правой части этого равенства даёт остаток 3, а число в левой части даёт остаток 0 или 2. Если же $k > n$, то число в правой части даёт остаток 1 или 2, а число в левой части — остаток 0. Получено противоречие.

З-ча **4**. Дана плоская замкнутая ломаная периметра 1. Доказать, что можно начертить круг радиусом $\frac{1}{4}$, покрывающий всю ломаную.

Реш **4**. Возьмём на ломаной две точки A и B, делящие её периметр пополам. Тогда $AB \leqslant 1/2$. Докажем, что все точки ломаной лежат внутри круга радиуса $1/4$ в центром в середине O отрезка AB. Пусть M — произвольная точка ломаной, а точка M_1 симметрична ей относительно точки O. Тогда $MO = M_1M/2 \leqslant (M_1A + AM)/2 = (BM + AM)/2 \leqslant 1/4$, так как $BM + AM$ не превосходит половины длины ломаной.

З-ча **5**. Доказать, что для любого треугольника отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится описанной окружностью пополам.

Реш **5**. Пусть продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M; O — центр вписанной окружности, O_b — центр вписанной окружности, касающейся стороны AC. Достаточно доказать, что $MO = MO_b$. Так как $\angle AOM = \angle BAO + \angle ABO = (\angle A + \angle B)/2$ и $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \angle A/2 + \angle CBM = (\angle A + \angle B)/2$, то $MA = MO$. Так как треугольник OAO_b прямоугольный и $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$, то $\angle MAO_b = \angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$, а значит, $MA = MO_b$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Найти целые числа x, y, z и v, такие, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 2xyzv.$$

Реш **1**. Ответ: $x = y = z = v = 0$.

Число $x^2 + y^2 + z^2 + v^2$ чётно, поэтому среди чисел x, y, z, v чётное число нечётных чисел.

Если все числа x, y, z, v нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 \equiv 0 \pmod 4$, но при этом $2xyzv$ не делится на 4.

Если ровно два из чисел x, y, z, v нечётны, то $x^2 + y^2 + z^2 + v^2$ не делится на 4, а $2xyzv$ делится на 4. Поэтому все числа x, y, z, v чётны, т.е. $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $v = 2v_1$. Мы получаем уравнение $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + v_1^2 = 8x_1y_1z_1v_1$. Теперь заметим, что $(2k+1)^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$. Поэтому если все числа x_1, y_1, z_1, v_1 нечётны, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + v_1^2$ не делится на 8. А если ровно два из этих чисел нечётно, то $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + v_1^2$ не делится даже на 4. Значит, $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$, $v_1 = 2v_2$, и мы получаем уравнение $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + v_2^2 = 32x_2y_2z_2v_2$. Снова повторив те же самые рассуждения, получим, что x, y, z, v делятся на 2^n при всех n, чего не может быть.

З-ча **2**. Как расположены плоскости симметрии ограниченного тела, если оно имеет две оси вращения? (Осью вращения тела называется прямая, после поворота вокруг которой на любой угол тело совмещается само с собой.)

Реш **2**. Оси вращения ограниченного тела пересекаются в его центре масс. Если тело имеет две оси вращения, пересекающиеся в точке O, и точка A принадлежит телу, то телу принадлежит вся сфера радиуса OA с центром O. Поэтому плоскостью симметрии является любая плоскость, проходящая через точку O.

З-ча **3**. Найти действительные корни уравнения:

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}} \quad \left(0 < a < \frac{1}{4}\right).$$

Реш **3**. Пусть $f(x)$ — левая часть данного уравнения. График функции $y = f(x)$ представляет собой параболу. Если $0 < a < 1/4$, то $f(x) > 0$. Поэтому исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a \pm \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}. \tag{1}$$

Правая часть уравнения (1) представляет собой обратную функцию $f^{-1}(x)$. В самом деле, если $y^2 + 2ay + \frac{1}{16} = x$, то $y = -a \pm \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$. Чтобы найти действительные корни данного уравнения, нужно найти точки пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому действительные корни данного уравнения являются в точности действительными корнями уравнения

$$x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x.$$

Решив это уравнение, находим

$$x_{1,2} = \frac{1-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

З-ча **4**. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что среди этих чисел найдется n одинаковых.

Реш **4**. Покажем, что среди данных чисел не может быть больше четырёх попарно различных чисел. Объединим равные числа в группы, выберем в каждой группе по одному числу и расположим выбранные числа в порядке убывания: $a > b > c > d > e > \ldots$. Числа a, b, c, d по условию образуют геометрическую прогрессию. Но $ab > cd$ и $ac > bd$, поэтому $ad = bc$, т.е. $d = bc/a$. Те же самые рассуждения показывают, что $e = bc/a$.

З-ча **5**. Доказать, что если у шестиугольника противоположные стороны параллельны и диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны, то вокруг него можно описать окружность.

Реш **5**. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, удовлетворяющий условию задачи. Четырёхугольник $FBCE$ является равнобочной трапецией, поэтому прямая MM_1, соединяющая середины её оснований, перпендикулярна к ним и служит биссектрисой угла между диагоналями BE и FC. Точно так же доказываются аналогичные свойства прямых NN_1 и LL_1, соединяющих середины противоположных сторон шестиугольника. Эти три прямые являются биссектрисами углов треугольника, образованного диагоналями, поэтому они пересекаются в одной точке O. Точка O равноудалена от всех вершин шестиугольника, поскольку она лежит на всех серединных перпендикулярах к сторонам шестиугольника. Значит, вокруг шестиугольника можно описать окружность с центром O.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. 12 полей расположены по кругу: на четырёх соседних полях стоят четыре разноцветных фишки: красная, жёлтая, зелёная и синяя.

Одним ходом можно передвинуть любую фишку с поля, на котором она стоит, через четыре поля на пятое (если оно свободно) в любом из двух возможных направлений. После нескольких ходов фишки стали опять на те же четыре поля. Как они могут при этом переставиться?

Реш **1**. Ответ: КЖЗС, СЗКЖ, ЖКСЗ, ЗСЖК.

Сделаем копии наших 12 полей и расположим их по кругу в следующем порядке: 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 12, 5, 10, 3, 8. На новом круге фишки ходят просто на соседнее поле (справа или слева). Поэтому любое передвижение, при котором фишки поменялись местами, представляет собой перемещение по новому кругу в одном направлении. На круге с четырьмя полями с номерами 1, 4, 2, 3 происходит циклическая перестановка, поэтому из набора КСЖЗ мы поучаем наборы СЖЗК, ЖЗКС, ЗКСЖ. Вернувшись к исходной нумерации 1, 2, 3, 4, получим наборы СЗКЖ, ЖКСЗ, ЗСЖК.

З-ча **2**. Даны два треугольника: ΔABC и ΔDEF и точка O. Берется любая точка X в ΔABC и любая точка Y в ΔDEF; треугольник OXY достаивается до параллелограмма $OXZY$.

а) Докажите, что все полученные таким образом точки образуют многоугольник.

б) Сколько сторон он может иметь?

в) Докажите, что его периметр равен сумме периметров исходных треугольников.

Реш **2**. Решим задачу в более общем виде, когда вместо двух треугольников взяты выпуклые n_1-угольник и n_2-угольник. Сначала докажем, что полученная фигура выпукла. Пусть A_1 и A_2 — точки этой фигуры. Тогда существуют параллелограммы $OB_1A_1C_1$ и $OB_2A_2C_2$ с вершинами B_1 и B_2, принадлежащими n_1-угольнику, и вершинами C_1 и C_2, принадлежащими n_2-угольнику. Если мы построим соответствующие точки для всех пар точек отрезков B_1B_2 и C_1C_2, то в результате получим параллелограмм со сторонами, параллельными B_1B_2 и C_1C_2, и с диагональю A_1A_2. (Для доказательства удобнее рассматривать не вершины параллелограмма, а их центры.) В частности, отрезок A_1A_2 принадлежит полученной фигуре, поэтому она выпукла.

Возьмём на плоскости произвольную ось координат Ox. *Опорным множеством* многоугольника, соответствующим оси Ox, назовём множество точек многоугольника, проекции которых на ось Ox имеют наибольшее значение (опорное множество — это вершина или сторона многоугольника). Выпуклый многоугольник задаётся своими опорными множествами для всех возможных осей Ox. Если опорными множествами исходных n_1-угольника и n_2-угольника являются отрезки длины a_1 и a_2, то опорным множеством полученной фигуры будет отрезок длины $a_1 + a_2$. Тем самым утверждение про периметр доказано. Число сторон полученного многоугольника может быть любым числом, заключённым между $n_1 + n_2$ и наибольшим из чисел n_1 и n_2 (оно равно $n_1 + n_2$ лишь в том случае, когда для любой оси Ox одно из опорных множеств исходных многоугольников имеет нулевую длину).

З-ча **3**. Имеется 13 гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые 12 из них можно так разложить на 2 чаши весов, по 6 гирь на каждой, что наступит равновесие. Докажите, что все гири имеют один и тот же вес.

Реш **3**. Сначала докажем, что все гири одновременно имеют либо чётный, либо нечётный вес. Пусть 12 гирь разложены на две чаши весов по 6 гирь так, что наступило равновесие. Предположим, что отложена гиря весом a г., а одна из гирь, лежащих на чашах, весит b г., причём числа a и b разной чётности. Заменим гирю a гирей b и снова разложим гири так, чтобы наступило равновесие. Вес гирь на каждой чаше весов изменился на $\frac{1}{2}|a - b|$, поэтому число $|a - b|$ чётно.

Предположим, что не все гири одинаковые. Вычтем из каждой гири вес наименьшей гири. В результате получим набор гирь, которые снова удовлетворяют условию задачи (по крайней мере одна из полученных гирь имеет нулевой вес). Все новые гири имеют чётный вес, строго меньший веса первоначальных гирь. Поделив вес каждой гири пополам (в том числе и гири с нулевым весом), мы снова получим набор гирь, удовлетворяющий условию задачи. Если при этом мы не получим гири нечётного веса, то снова поделим веса всех гирь пополам и т.д. В конце концов получим систему гирь, которая удовлетворяет условию задачи и в которой есть как гири чётного (нулевого) веса, так и гири нечётного веса. Но мы уже доказали, что такого быть не может.

З-ча **4**. В произвольном (*выпуклом — прим. ред.*) шестиугольнике соединены через одну середины сторон. Докажите, что точки пересечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

Реш **4**. Точкой пересечения медиан каждого из рассматриваемых треугольников служит центр масс шестиугольника (т.е. центр масс шести вершин шестиугольника, в которые помещены одинаковые массы).

З-ча **5**. Если имеется 100 любых (*целых — прим. ред.*) чисел, то среди них всегда можно взять несколько (или может быть одно) так, что в сумме они дадут число, делящееся на 100. Доказать.

Реш **5**. Пусть $a_1, \dots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрим суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{100} = a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$. Если ни одна из этих сумм не делится на 100, то числа $S_1, \dots, S_{100}$ дают не более 99 различных остатков при делении на 100. Поэтому найдутся числа S_n и S_m $(n > m)$, дающие одинаковые остатки при делении на 100. Но тогда число $S_n - S_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$ делится на 100.

З-ча **6**. Дана окружность и точка вне её; из этой точки мы совершаем путь по замкнутой ломаной, состоящей из отрезков прямых, касательных к окружности, и заканчиваем путь в начальной точке. Участки пути, по которым мы приближались к центру окружности, берём со знаком «плюс», а участки пути, по которым мы удалялись от центра, — со знаком «минус». Докажите, что для любого такого пути алгебраическая сумма длин участков пути, взятых с указанными знаками, равна нулю.

(*Эту задачу не решил никто из участников олимпиады.*)

Реш **6**. Пусть $ABCD\dots YZ$ — указанная замкнутая ломаная, $t_A, t_B, \dots, t_Z$ — длины касательных к окружности, проведённых из вершин ломаной. В соответствии с соглашением о знаках алгебраическая длина участка пути от A к B равна $t_A - t_B$. Поэтому алгебраическая сумма длин участков пути с указанными знаками равна

$$(t_A - t_B) + (t_B - t_C) + \dots + (t_Y - t_Z) + (t_Z - t_A) = 0.$$

9 — 10 классы

З-ча **1**. См. задачу 1 для 7 — 8 классов.

З-ча **2**. Сложить из одинаковых кирпичиков (рис.???) выпуклый многогранник.

Реш **2**. Разрежем куб на 8 кубиков. Возьмём один из этих кубиков и приложим к нему три соседних кубика. Куб можно составить из двух таких (невыпуклых) фигур, каждая из которых составлена из четырёх кубиков. Возьмём одну из этих фигур и отрежем от неё три ребра исходного куба, проведя три плоскости, проходящие через диагонали граней маленьких кубиков параллельно рёбрам исходного куба. (Вместе с рёбрами мы отрезаем три треугольные призмы; эти призмы пересекаются.) В результате получим невыпуклую фигуру, которую легко можно разрезать на три кирпичика. Из двух таких фигур составляется выпуклая фигура, которая получается при отрезании от исходного куба шести рёбер (точнее говоря, шести пересекающихся призм).

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 — 8 классов.

З-ча **4**. В данный треугольник поместить центрально–симметричный многоугольник наибольшей площади.

Реш **4**. Пусть O — центр симметрии многоугольника M, расположенного внутри треугольника T, $S(T)$ — образ треугольника T при симметрии относительно точки O. Тогда M лежит и в T, и в $S(T)$. Поэтому среди всех центрально симметричных многоугольников с данным центром симметрии, лежащих в T, наибольшую площадь имеет пересечение T и $S(T)$. Точка O лежит внутри треугольника T, так как пересечением T и $S(T)$ является выпуклый многоугольник, а выпуклый многоугольник всегда содержит свой центр симметрии.

Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника $T = ABC$. Предположим сначала, что точка O лежит внутри треугольника $A_1B_1C_1$. Тогда пересечением T и $S(T)$ является шестиугольник. Пусть сторона AB делится сторонами треугольника $S(T)$ в отношении $x : y : z$, где $x + y + z = 1$. Тогда отношение суммы площадей треугольников, прилегающих к вершинам A, B, C, к площади треугольника ABC равно $x^2 + y^2 + z^2$; нужно минимизировать это выражение. Так как $1 = (x+y+z)^2 = 3(x^2+y^2+z^2) - (x-y)^2 - (y-z)^2 - (z-x)^2$, то $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1/3$, причем равенство достигается только при $x = y = z$; последнее равенство означает, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

Рассмотрим теперь другой случай: точка O лежит внутри одного из треугольников AB_1C_1, ABC_1, A_1B_1C, например внутри AB_1C_1. В этом случае пересечением T и $S(T)$ является параллелограмм, причем если мы заменим точку O точкой пересечения прямых AO и B_1C_1, то площадь этого параллелограмма может только увеличиться. Если же точка O лежит на стороне B_1C_1, то этот случай уже фактически был нами рассмотрен (нужно положить $x = 0$).

Искомым многоугольником является шестиугольник с вершинами в точках, делящих стороны треугольника на три равные части. Его площадь равна 2/3 площади треугольника.

З-ча **5**. Докажите, что числа вида 2^n при различных целых положительных n могут начинаться на любую наперёд заданную комбинацию цифр.

Реш **5**. Пусть A — данное натуральное число. Покажем, что натуральное число n можно выбрать так, что $10^m A < 2^n < 10^m(A+1)$, т.е. $m + \lg A < n \lg 2 < m + \lg(A+1)$. Эквивалентное условие таково: существуют натуральные числа m и n, для которых $\lg A < n \lg 2 - m < \lg(A+1)$. Число $\lg 2$ иррационально. (Действительно, предположим, что $\lg 2 = p/q$, где p и q — натуральные числа. Тогда $10^{p/q} = 2$, т.е. $10^p = 2^q$. Этого не может быть.) Поэтому остаётся доказать следующее утверждение: «Пусть α — иррациональное число. Тогда для любых чисел $a < b$ можно выбрать целые числа m и n, для которых $a < m\alpha - n < b$.»

Пусть $\Delta = b - a$. Для каждого целого числа m можно выбрать целое число n так, что $0 \leqslant m\alpha - n \leqslant 1$. Разделим отрезок $[0,\ 1]$ на равные отрезки, длина каждого из которых меньше Δ. Пусть количество этих отрезков равно k. Тогда среди чисел $\alpha - n_1$, $2\alpha - n_2$, $\ldots$, $(k+1)\alpha - n_{k+1}$ есть два числа, принадлежащих одному и тому же отрезку. Вычтем из большего числа меньшее: $p\alpha - n_p - (q\alpha - n_q) = t$. Ясно, что $0 \leqslant t < \Delta$. Более того, $t \neq 0$, поскольку иначе $\alpha = \frac{n_p - n_q}{p-q}$ — рациональное число. Рассмотрим числа вида Nt, где N — целое число. Каждое из этих чисел имеет вид $m\alpha - n$. А из того, что $0 < t < \Delta$, следует, что хотя бы одно из этих чисел расположено строго между a и b.

З-ча **6**. Докажите, что к квадрату нельзя приложить более 8 не налегающих друг на друга квадратов.

Реш **6**. Пусть $ABCD$ — исходный квадрат, $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат с тем же центром, стороны которого параллельны сторонам исходного квадрата и имеют вдвое большую длину. Для определённости будем считать, что сторона исходного квадрата равна 2. Тогда периметр квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равен 16. Поэтому достаточно доказать, что длина части периметра квадрата $A_1B_1C_1D_1$, высекаемой приложенным квадратом, не может быть меньше 2. Рассмотрим два возможных варианта расположения квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и приложенного квадрата.

1) Ни одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ не попадает внутрь приложенного квадрата. В этом случае рассматриваемая часть периметра является отрезком PQ. Если внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежит только одна вершина приложенного квадрата (та, которая примыкает к исходному квадрату), то длина отрезка PQ равна $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \geqslant 2$; здесь α — угол между стороной исходного квадрата и стороной приложенного квадрата. Если внутри квадрата $A_1B_1C_1D_1$ лежат две вершины приложенного квадрата, то отрезок PQ является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетом 2.

2) Одна вершина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ попадает внутрь приложенного квадрата. Тогда длина рассматриваемой части периметра равна $a+\operatorname{tg}\alpha+1-a\operatorname{tg}\alpha$ (рис.???). Требуется доказать, что $a+\operatorname{tg}\alpha+1-a\operatorname{tg}\alpha \geqslant 2$, т.е. $(a-1)\operatorname{tg}\alpha \leqslant (a-1)$. Но $a \geqslant 1$ и $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 1$.

XIII олимпиада (1950)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Имеется шахматная доска с обычной раскраской (границы квадратов считаются окрашенными в чёрный цвет). Начертить на ней окружность наибольшего радиуса, целиком лежащую на чёрном и доказать, что большей начертить нельзя.

Реш **1**. Окружность S, целиком лежащая на чёрном, может пересекать сторону клетки только в вершине (иначе она частично лежала бы на белом). Пусть окружность S проходит через две вершины A и B чёрной клетки. Рассмотрим сначала случай, когда вершины A и B соседние. Возьмём вершину A и рассмотрим другую чёрную клетку вершиной A. Окружность S проходит либо через соседнюю (а именно, ту, которая не лежит на прямой AB), либо через противоположную вершину этой клетки. В первом случае радиус окружности S равен $\sqrt{2}/2$, а во втором — $\sqrt{10}/2$. Рассмотрим теперь случай, когда вершины A и B противоположные. Снова возьмём вершину A и рассмотрим другую чёрную клетку вершиной A. Теперь окружность S обязательно проходит через соседнюю с A вершину другой клетки (если бы она проходила через противоположную вершину, то мы получили бы прямую, а не окружность). Радиус такой окружности равен $\sqrt{10}/2$. В итоге получаем, что наибольший радиус имеет следующая окружность S. Возьмём чёрную клетку и рассмотрим прилегающие к ней белые клетки. Окружность S проходит через 8 вершин этих белых клеток, отличных от вершин исходной чёрной клетки.

З-ча **2**. Имеется 555 гирь весом: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, … 555 г. Разложить их на 3 равные по весу кучи.

Реш **2**. Девять гирь весом n, $n+1$, … , $n+8$ можно разложить на три равные по весу кучи: 1) n, $n+4$, $n+8$; 2) $n+1$, $n+5$, $n+6$; 3) $n+2$, $n+3$, $n+7$. Это позволяет разложить на три равные по весу кучи гири весом 1, 2, … , $549 = 61 \cdot 9$. Оставшиеся шесть гирь весом 550, 551, … , 555 можно разложить на три равные по весу кучи следующим образом: 1) 550 и 555; 2) 551 и 554; 3) 552 и 553.

З-ча **3**. Даны 3 окружности O_1, O_2, O_3, проходящие через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с O_3 и O_3 с O_1 обозначим соответственно через A_1, A_2 и A_3. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадет с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Если B_3 не совпадет с A_3, то проводим через B_3 и A_3 прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_4. Докажите, что B_4 совпадает с B_1.

Реш **3**. Пусть $\angle(AB, CD)$ — ориентированный угол между прямыми AB и CD. Тогда $\angle(A_3O, A_3B_1) + \angle(A_3B_3, A_3O) = \angle(A_1O, A_1B_1) + \angle(A_2B_3, A_2O) = \angle(A_1O, A_1B_2) + \angle(A_2B_2, A_2O) = 0^\circ$, поэтому точки A_3, B_1 и B_3 лежат на одной прямой. Значит, $B_4 = B_1$.

З-ча **4**. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника; A, B, C — величины противоположных углов. Докажите, что

$$Aa + Bb + Cc \geqslant \frac{1}{2}(Ab + Ba + Ac + Ca + Bc + Cb).$$

Реш **4**. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, поэтому $(A-B)(a-b) \geqslant 0$, $(B-C)(b-c) \geqslant 0$, $(C-A)(c-a) \geqslant 0$. Сложив эти неравенства, получаем требуемое.

З-ча **5**. Из пункта A в другие можно попасть двумя способами:

1. Выйти сразу и идти пешком.

2. Вызвав машину и, подождав ее определённое время, ехать на ней.

В каждом случае используется способ передвижения, требующий меньшего времени. При этом оказывается, что

если конечный пункт отстоит на	то понадобится на дорогу
1 км	10 мин
2 км	15 мин
3 км	$17\frac{1}{2}$ мин

Скорости пешехода и машины, а также время ожидания машины, принимаются неизменными.

Сколько понадобится времени для достижения пункта, отстоящего от A на 6 км?

Реш **5**. Ответ: 25 мин.

Пусть v — скорость пешехода, V — скорость машины, T — время ожидания машины. (Скорость будем измерять в км/час, а время — в часах.) Если идти пешком, то на дорогу в 1, 2 и 3 км понадобится, соответственно, $1/v$, $2/v$ и $3/v$ часов, а если ехать на машине, то $T + \frac{1}{V}$, $T + \frac{2}{V}$ и $T + \frac{3}{V}$ часов. Предположим, что 2 км не медленнее пройти пешком, чем ехать на машине, т.е. $T + \frac{2}{V} \geqslant \frac{2}{v}$. Тогда $T + \frac{1}{V} \geqslant \frac{T}{2} + \frac{1}{V} \geqslant \frac{1}{v}$, т.е. 1 км тем более можно идти пешком. Но если можно идти пешком 1 км и 2 км, то тогда затраченное на 2 км время было бы ровно в 2 раза больше, чем на 1 км, а по условию это не так. Поэтому $T + \frac{2}{V} \leqslant \frac{2}{v}$, а значит, $T + \frac{3}{V} \leqslant \frac{3}{2}\left(T + \frac{2}{V}\right) \leqslant \frac{3}{v}$. Следовательно, $1/v = 1/6$, $T + 2/V = 1/4$ и $T + 3/V = 7/24$. Решая эту систему уравнений, находим: $v = 6$, $T = 1/6$, $V = 24$. Если идти 6 км пешком, то на это понадобится 1 час, а если ехать на машине, то понадобится $\frac{1}{6} + \frac{6}{24} = \frac{5}{12}$, т.е. 25 мин.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Пусть A — произвольный угол, B и C — острые углы. Всегда ли существует такой угол X, что

$$\sin X = \frac{\sin B \sin C}{1 - \cos A \cos B \cos C}?$$

(Из «Воображаемой геометрии» Н. И. Лобачевского).

Реш **1**. Ответ: да, всегда. По условию $\cos B \cos C > 0$. Кроме того, $\sin B \sin C + \cos B \cos C = \cos(B - C) \leqslant 1$ и $\cos A \leqslant 1$. Поэтому $\sin B \sin C \leqslant 1 - \cos B \cos C \leqslant 1 - \cos A \cos B \cos C$ и

$$0 < \frac{\sin B \sin C}{1 - \cos A \cos B \cos C} \leqslant 1.$$

З-ча **2**. Из двух треугольных пирамид с общим основанием одна лежит внутри другой. Может ли быть сумма ребер внутренней пирамиды больше суммы ребер внешней?

Реш **2**. Ответ: да, может. Рассмотрим правильную треугольную пирамиду с основанием BCD и вершиной A. Пусть длина стороны основания равна ε, а длина бокового ребра равна 1. Возьмём на стороне AD точку D' так, что $AD' = \varepsilon$. Если ε мало, то сумма длин рёбер пирамиды $ABCD$ близка к 3, а сумма длин рёбер пирамиды $ABCD'$ близка к 4.

З-ча **3**. Имеется 81 гиря весом 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, ..., 81^2 г. Разложить их на 3 равные по весу кучи.

Реш **3**. Разложим девять гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ..., $(n+8)^2$ на три кучи следующим образом: 1) n^2, $(n+5)^2$, $(n+7)^2$; 2) $(n+1)^2$, $(n+3)^2$, $(n+8)^2$; 3) $(n+2)^2$, $(n+4)^2$, $(n+6)^2$. Первые две кучи весят одинаково, а вес третьей кучи на 18 г меньше. Поэтому 27 гирь весом n^2, $(n+1)^2$, ..., $(n+26)^2$ можно разложить на 9 куч так, что 6 куч будут одного веса, а ещё 3 кучи будут весить каждая на 18 меньше, чем первые 6. Из этих девяти куч можно сложить 3 равные по весу кучи. Таким образом, $27k$ гирь весом 1^2, 2^2, 3^2, ..., $(27k)^2$ можно разложить на 3 равные по весу кучи. При $k = 3$ получаем требуемое утверждение.

З-ча **4**. Решить уравнение:

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Реш **4**. Ответ: $5 \leqslant x \leqslant 10$. Заметим, что

$$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 2)^2,$$
$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 3)^2.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1$$

(все корни мы считаем положительными). Рассмотрим по очереди все возможные случаи.

1. $\sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \geqslant 0$, т.е. $x \geqslant 10$. В этом случае уравнение имеет единственное решение $x = 10$.

2. $\sqrt{x-1} - 2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \leqslant 0$, т.е. $5 \leqslant x \leqslant 10$. Этом случае получаем тождество, т.е. если $5 \leqslant x \leqslant 10$, то x является корнем данного уравнения.

3. $\sqrt{x-1} - 2 \leqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \leqslant 0$, т.е. $x \leqslant 5$. Уравнение имеет единственное решение $x = 5$.

Случай, когда $\sqrt{x-1} - 2 \leqslant 0$ и $\sqrt{x-1} - 3 \geqslant 0$, очевидно, невозможен.

З-ча **5**. Дано n окружностей: $O_1, O_2, \ldots O_n$, проходящих через одну точку O. Вторые точки пересечения O_1 с O_2, O_2 с $O_3, \ldots, O_3$ с O_1 обозначим соответственно через $A_1, A_2, \ldots, A_n$. На O_1 берем произвольную точку B_1. Если B_1 не совпадает с A_1, то проводим через B_1 и A_1 прямую до второго пересечения с

O_2 в точке B_2. Если B_2 не совпадает с A_2, то проводим через B_2 и A_2 прямую до второго пересечения с O_3 в точке B_3. Продолжая таким образом, мы получим точку B_n на окружности O_n. Если O_n не совпадает с A_n, то проводим через B_n и A_n прямую до второго пересечения с O_1 в точке B_{n+1}. Докажите, что B_{n+1} совпадает с B_1.

Реш **5**. Пусть $\angle(AB, CD)$ — ориентированный угол между прямыми AB и CD (он измеряется с точностью до 180°). Тогда $\angle(B_nA_n, A_nO) = \angle(B_nA_{n-1}, A_{n-1}O) = \angle B_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}O)$. Аналогично получаем $\angle(B_{n-1}A_{n-1}, A_{n-1}O) = \angle(B_{n-2}A_{n-2}, A_{n-2}O) = \cdots = \angle(B_1A_1, A_1O)$. Наконец, $\angle(B_1A_1, A_1O) = \angle(B_1A_n, A_nO)$. В итоге получаем $\angle(B_nA_n, A_nO) = \angle(B_1A_n, A_nO)$. Это означает,что точки A_n, B_1 и B_n лежат на одной прямой. Следовательно, $B_{n+1} = B_n$.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. В выпуклом 13-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с наибольшим числом сторон. Какое самое большее число сторон может он иметь?

Реш **1**. Ответ: 13. Из каждой вершины исходного 13-угольника выходит не более двух диагоналей, которые являются сторонами рассматриваемого многоугольника. Каждой диагонали соответствуют две вершины, поэтому число сторон рассматриваемого многоугольника не превосходит 13. Пример правильного 13-угольника показывает, что число сторон полученного при разрезании многоугольника может быть равно 13.

З-ча **2**. Докажите, что

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots\frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Реш **2**. Пусть $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}$ и $B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{98}{99}$. Ясно, что $B > A$ и $AB = \frac{1}{100}$. Поэтому $A^2 < AB = \frac{1}{100}$.

З-ча **3**. В треугольник вписана окружность. Около неё описан квадрат. Докажите, что вне треугольника лежит меньше половины периметра квадрата.

Реш **3**. Треугольник касается вписанной окружности в трёх точках, а квадрат касается её в четырёх точках. Поэтому между некоторыми двумя точками касания треугольника с окружностью лежат две точки касания квадрата с окружностью. Следовательно, внутри треугольника лежит по крайней мере один «уголок» квадрата (т.е. вершина квадрата вместе с половинами выходящих из неё сторон квадрата). Если таких уголков будет два, то мы сразу получаем, что внутри треугольника лежит по крайней мере половина периметра квадрата. Предположим, что такой уголок только один, т.е. три остальных уголка хотя бы частично лежат вне треугольника (тогда соответствующие вершины квадрата тоже лежат вне треугольника). Покажем, что не менее трети периметра каждого из этих трёх уголков лежит внутри треугольника. Вне треугольника лежит часть уголка, представляющая собой прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Внутри треугольника лежат отрезки $1 - a$ и $1 - b$ (мы предполагаем, что длина стороны квадрата равна 2). Ясно, что $(1 - a) + (1 - b) = c$, $a \leqslant c$ и $b \leqslant c$. Поэтому $a + b \leqslant 2c = 4 - 2(a + b)$, т.е. $a + b \leqslant 4/3$. Это означает, что вне треугольника лежит не более $2/3$ периметра уголка. Итак, внутри треугольника лежит фигура, имеющая по крайней мере следующий периметр: $2 + 3\cdot\frac{2}{3} = 4$, а периметр всего квадрата равен 8.

З-ча **4**. На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 (*непересекающимися — прим. ред.*) хордами. Сколькими способами это можно сделать?

Реш **4**. Ответ: 16796. Пусть a_n — количество способов соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами. Ясно, что $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. Покажем, что

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}a_1 + a_{n-3}a_2 + \cdots + a_1a_{n-2} + a_{n-1}.$$

Фиксируем одну из данных $2n$ точек. Хорда, выходящая из неё, делит окружность на две дуги, причём на каждой дуге расположено чётное число данных точек: от 0 до $2n-2$. Если на одной дуге расположено $2k$ точек, то на другой дуге расположено $2(n-k-1)$ точек; эти точки можно соединить непересекающимися хордами (не пересекающими хорду, выходящую из фиксированной точки) $a_{n-k-1}a_k$ способами.

Таким образом, $a_3 = a_2 + a_1^2 + a_2 = 5$, $a_4 = 14$, $a_5 = 42$, $a_6 = 132$, $a_7 = 429$, $a_8 = 1430$, $a_9 = 4862$ и $a_{10} = 16796$.

Замечание. *Можно доказать, что* $a_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$.

9 — 10 классы

З-ча **1**. В выпуклом 1950-угольнике проведены все диагонали. Они разбивают его на многоугольники. Возьмём среди них многоугольник с самым большим числом сторон. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

Реш **1**. О т в е т : 1949. Те же самые рассуждения, что и при решении задачи 1 для 7–8 классов, показывают, что полученный многоугольник имеет не более 1950 сторон, причём если число его сторон равно 1950, то из каждой вершины исходного многоугольника выходят ровно две диагонали, ограничивающих полученный многоугольник. Пусть из вершины A_1 выходят две диагонали A_1A_p и A_1A_q, ограничивающие полученный многоугольник. Тогда A_p и A_q — соседние вершины, поскольку иначе внутри угла $A_pA_1A_q$ была бы диагональ, разрезающая полученный многоугольник. Действительно, вершину, лежащую между A_p и A_q, нужно было бы соединить с вершиной, лежащей между A_1 и A_p или между A_1 и A_q. Изменив при необходимости направление нумерации вершин, можно считать, что $q = p + 1$ и $p \leqslant 1950/2 = 975$. Если исключить диагональ A_1A_{p+1}, то любая другая диагональ, ограничивающая полученный многоугольник, соединяет одну из вершин с номером от 2 до p с некоторой вершиной. Поэтому всего у полученного многоугольника может быть не более $1 + 974 \cdot 2 = 1949$ сторон. Чтобы получить пример 1950-угольника, при разрезании которого получается 1949-угольник, можно взять правильный 1949-угольник и отрезать от него маленький треугольник, т.е. вместо вершины A_1 взять две вершины A_1' и A_{1950}, расположенные на сторонах A_1A_2 и A_1A_{1949} вблизи вершины A_1.

З-ча **2**. Числа $1, 2, 3, \ldots 101$ написаны в ряд в каком-то порядке. Докажите, что из них можно вычеркнуть 90 так, что оставшиеся 11 будут расположены по их величине (либо возрастая, либо убывая).

(*Эта задача не была решена никем из участников олимпиады.*)

Реш **2**. Докажем, что любая последовательность из $mn + 1$ попарно различных чисел содержит либо возрастающую последовательность из $m + 1$ чисел, либо убывающую последовательность из $n + 1$ чисел. Сопоставим члену a_k данной последовательности два числа x_k и y_k, где x_k — наибольшая длина возрастающей последовательности, начинающейся с a_k, y_k — наибольшая длина убывающей последовательности, начинающейся с a_k. Предположим, что $x_k \leqslant m$ и $y_k \leqslant n$ для всех k. Тогда количество всех различных пар (x_k, y_k) не превосходит mn. Поэтому $x_k = x_l$ и $y_k = y_l$ для некоторых номеров $k \neq l$. Но этого не может быть. Действительно, пусть для определённости $k < l$. Тогда если $a_k < a_l$, то $x_k > x_l$, а если $a_k > a_l$, то $y_k > y_l$.

З-ча **3**. Около сферы описан пространственный четырёхугольник. Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

Реш **3**. Пусть сфера касается сторон AB, BC, CA и AD в точках K, L, M и N соответственно. Тогда $AN = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ и $DM = DN$. Поэтому

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN}{AN} = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим точку N', в которой плоскость KLM пересекает прямую DA. Покажем, что

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN'}{AN'} = 1. \tag{2}$$

Для этого рассмотрим проекцию на прямую, перпендикулярную плоскости KLM. Точки K, L, M и N' при этом проецируются в одну и ту же точку X. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — проекции точек A, B, C, D. Отношения отрезков, лежащих на одной прямой, при проекции сохраняются, поэтому

$$\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{CM}{DM} \cdot \frac{DN'}{AN'} = \frac{A_1X}{B_1X} \cdot \frac{B_1X}{C_1X} \cdot \frac{C_1X}{D_1X} \cdot \frac{D_1X}{A_1X} = 1.$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $DN : AN = DN' : AN'$, поэтому $N = N'$ (обе точки N и N' лежат на отрезке AD).

З-ча **4**. Можно ли провести в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдётся остановка, не лежащая ни на одном из них, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки.

Реш **4**. О т в е т : да, можно. Проведём 10 попарно пересекающихся прямых. Пусть маршруты проходят по этим прямым, а остановками служат точки пересечения прямых. Любые 9 маршрутов проходят через все остановки, поскольку через каждую остановку, лежащую на оставшейся прямой, проходит одна из 9 прямых, соответствующих этим маршрутам. Любые 8 маршрутов не проходят через остановку, которая является точкой пересечения двух остальных маршрутов.

XIV олимпиада (1951)

Первый тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Докажите, что многочлен

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$$

при всех значениях x положителен.

Реш **1**. Если $x \leqslant 0$, то $x^{12},\ -x^9,\ x^4,\ -x \geqslant 0$. Если $0 < x < 1$, то $x^{12} + x^4(1 - x^5) + (1 - x) > 0$. Если $x \geqslant 1$, то $x^9(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1 > 0$.

З-ча **2**. У выпуклых четырёхугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственные стороны равны.

Доказать, что если $\angle A > \angle A'$, то $\angle B < \angle B'$, $\angle C > \angle C'$ и $\angle D < \angle D'$.

Реш **2**. Рассмотрим треугольники BAD и $B'A'D'$. По условию $BA = B'A'$, $AD = A'D'$ и $\angle A > \angle A'$. Из этого следует, что $BD > B'D'$. Рассмотрев теперь треугольники BCD и $B'C'D'$ и воспользовавшись неравенством $BD > B'D'$, получим $\angle C > \angle C'$.

Рассмотрим теперь другие две пары треугольников: ABC и $A'B'C'$, ADC и $A'D'C'$. Если бы имело место неравенство $AC \geqslant A'C'$, то мы получили бы неравенства $\angle B \geqslant \angle B'$ и $\angle D \geqslant \angle D'$. А тогда оказалось бы, что сумма углов четырёхугольника $ABCD$ больше суммы углов четырёхугольника $A'B'C'D'$; такого быть не может. Следовательно, $AC < A'C'$, а поэтому $\angle B < \angle B'$ и $\angle D < \angle D'$.

З-ча **3**. Что больше

$$\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2 + 2,00000000004}$$

или

$$\frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2 + 2,00000000002}?$$

Реш **3**. Ответ: второе выражение больше. Пусть $a = 1,00000000004$ и $b = 1,00000000002$. Тогда рассматриваемые выражения равны $\frac{1+a}{1+a+a^2}$ и $\frac{1+b}{1+b+b^2}$, причём $a > b$. Остаётся заметить, что

$$\frac{1+b}{1+b+b^2} - \frac{1+a}{1+a+a^2} = \frac{(a-b)(a+b+ab)}{(1+a+a^2)(1+b+b^2)} > 0.$$

З-ча **4**. Точка внутри равнобочной трапеции соединяется со всеми вершинами. Доказать, что из четырёх полученных отрезков можно сложить четырёхугольник, вписанный[6] в эту трапецию.

Реш **4**. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (AB и CD — её основания), P — данная точка. Приложим к трапеции $ABCD$ равную ей трапецию $A'B'C'D'$ так, чтобы вершина C' совместилась с вершиной A, а вершина B' — с вершиной D. Пусть P' — точка трапеции $A'B'C'D'$, соответствующая точке P. Тогда четырёхугольник $PAP'D$ искомый: он вписан в трапецию, одна боковая сторона которой проходит через точку P параллельно BC, а другая — через точку P' параллельно AD.

З-ча **5**. Имеется кусок цепи из 60 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, …, 60 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

Реш **5**. Ответ: 3 звена. Выясним, при каком наибольшем n достаточно расковать k звеньев n-звенной цепи, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса от 1 до n. Если расковано k звеньев, то любое число звеньев от 1 до k можно набрать из них. Но $k+1$ звеньев мы не сможем набрать, если не будет части из $k+1$ или менее звеньев (мы здесь не учитываем раскованные звенья). Наиболее выгодно иметь часть из ровно $k+1$ звеньев. Тогда мы сможем получить любое число звеньев от 1 до $2k+1$. (Иначе мы сможем получить лишь число звеньев от 1 до $l_1 + k$, где $l_1 \leqslant k$.) Затем наиболее выгодно иметь часть из $2(k+1)$ звеньев, затем из $4(k+1)$ звеньев и т.д. Итак, если мы расковали k звеньев, то наиболее выгодна ситуация, когда полученные при этом $k+1$ частей состоят из $k+1$, $2(k+1)$, $4(k+1)$, $8(k+1)$, …, $2^k(k+1)$ звеньев (раскованные звенья мы здесь не учитываем). В таком случае можно составить любое число звеньев от 1 до $n = 2^{k+1}(k+1) - 1$. Итак, если $2^k k \leqslant n \leqslant 2^{k+1}(k+1) - 1$, то можно обойтись k разрывами и нельзя обойтись $k-1$ разрывами. В частности, если $24 \leqslant n \leqslant 63$, то наименьшее число раскованных звеньев равно 3. Полученные при расковке четыре части цепи должны состоять при этом из 4, 8, 16, 29 звеньев.

---

[6] Разрешается, чтобы вершины четырёхугольника лежали не только на сторонах трапеции, но и на их продолжениях — прим. ред.

9 — 10 классы

З-ча **1**. Из всех выпуклых многоугольников, у которых одна сторона равна a и сумма внешних углов при вершинах, не прилегающих к этой стороне, равна 120°, выбрать многоугольник наибольшей площади.

Реш **1**. Ответ: равносторонний треугольник со стороной a. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$ со стороной $A_1A_n = a$, обладающий указанным свойством. Если $n \geqslant 4$, то этот n-угольник можно заменить на $(n-1)$-угольник $A_1 \dots A_{n-3}A'_{n-2}A'_{n-1}$, где $A'_{n-1} = A_n$ и A'_{n-2} — точка пересечения лучей $A_{n-3}A_{n-2}$ и A_nA_{n-1} (эти лучи пересекаются, потому что сумма внешних углов при вершинах A_{n-2} и A_{n-1} меньше 180°). Новый многоугольник имеет строго бо́льшую площадь. Поэтому достаточно рассмотреть случай треугольника. У рассматриваемых треугольников фиксирована сторона $BC = a$ и противолежащий угол $\angle A$ (он равен 60°). Точка A расположена на дуге окружности, из которой отрезок BC виден под углом 60°. Поэтому высота, опущенная из точки A, максимальна в случае равнобедренного треугольника.

З-ча **2**. Докажите, что первые три цифры частного

$$\frac{0,1234567891011\dots4748495051}{0,51504948\dots4321}$$

суть $0,239$.

Реш **2**. Пусть $a = 0,1234\dots5051$ и $b = 0,5150\dots321$. Требуется доказать, что $0,239b \leqslant a < 0,24b$. Но $0,515 < b < 0,516$, поэтому $0,239b < 0,239 \cdot 0,516 = 0,123324 < a$ и $0,24b > 0,24 \cdot 0,515 = 0,1236 > a$.

З-ча **3**. Имеются две концентрические окружности. Вокруг меньшей из них описан многоугольник, целиком находящийся внутри большей окружности. Из общего центра на стороны многоугольника опущены перпендикуляры, которые продолжены до пересечения с большей окружностью; каждая из полученных точек пересечения соединена с концами соответствующей стороны многоугольника. При каком условии построенный так звёздчатый многоугольник будет развёрткой пирамиды?

Реш **3**. Ответ: при условии, что $R > 2r$, где R — радиус большей окружности, r радиус меньшей окружности.

Чтобы получилась развёртка пирамиды, нужно, чтобы выполнялись два условия: 1) длины двух сторон звёздчатого многоугольника, выходящих из одной вершины описанного многоугольника, равны; 2) сумма углов звёздчатого многоугольника при вершинах, лежащих на большей окружности, меньше 360°. Первое условие выполняется всегда. Посмотрим, когда выполняется второе условие. Сравним угол при вершине, лежащей на большей окружности, с углом, под которым видна соответствующая сторона описанного многоугольника из центра окружности. Эти углы равны, если $r = R - r$. Если $r < R - r$, то первый угол меньше второго, а если $r > R - r$, то первый угол больше второго. Остаётся заметить, что сумма углов, под которыми видны стороны описанного многоугольника из центра окружности, равна 360°.

З-ча **4**. Имеется кусок цепи из 150 звеньев, каждое из которых весит 1 г. Какое наименьшее число звеньев надо расковать, чтобы из образовавшихся частей можно было составить все веса в 1 г, 2 г, 3 г, ..., 150 г (раскованное звено весит тоже 1 г)?

Реш **4**. Ответ: 4 звена. Согласно решению задачи 5 для 7–8 классов для цепи, состоящей из n звеньев, где $64 \leqslant n \leqslant 159$, достаточно расковать 4 звена.

З-ча **5**. Даны три параллельные прямые на равных расстояниях друг от друга. Как надо изображать точками соответствующих прямых величины сопротивления, напряжения и силы тока в проводнике, чтобы, прикладывая линейку к точкам, изображающим значения сопротивления R и значения силы тока I, получить на шкале напряжения точку, изображающую величину напряжения $V = I \cdot R$ (точка каждой шкалы изображает одно и только одно число).

Реш **5**. Пусть некоторая прямая пересекает данные прямые в точках O_1, O_2, O_3. Введём на данных прямых координаты x, y, z с началами координат в точках O_1, O_2, O_3 (единица длины одна и та же и направления осей одни и те же). Положим $I = 10^x$ (т.е. точке с координатой x мы сопоставляем силу тока $I = 10^x$), $R = 10^{-2y}$ и $U = 10^{-z}$. Точки с координатами x, y, z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $x + z = 2y$, т.е. $10^{-z} = 10^x \cdot 10^{-2y}$. Это означает, что $V = I \cdot R$.

Второй тур

7 — 8 классы

З-ча **1**. Докажите, что число

$$1\underbrace{00\dots0}_{49}\underbrace{500\dots0}_{99}1$$

не является кубом никакого целого числа.

Реш **1**. Рассматриваемое число равно $10^{150} + 5 \cdot 10^{100} + 1$. Оно больше $(10^{50}+1)^3 = 10^{150} + 3 \cdot 10^{100} + 3 \cdot 10^{50} + 1$, но меньше $(10^{50}+2)^3 = 10^{150} + 6 \cdot 10^{100} + 12 \cdot 10^{50} + 8$.

З-ча **2**. На плоскости даны три точки A, B, C и три угла $\angle D$, $\angle E$, $\angle F$, меньшие $180°$ и в сумме равные $360°$. Построить с помощью линейки и транспортира точку O плоскости такую, что $\angle AOB = \angle D$, $\angle BOC = \angle E$, $\angle COA = \angle F$ (с помощью транспортира можно измерять и откладывать углы).

Реш **2**. Если требуемая точка O существует, то она должны лежать внутри треугольника ABC. В таком случае должны выполняться неравенства $\angle D < \angle C$, $\angle E < \angle A$, $\angle F < \angle B$. Мы будем предполагать, что эти неравенства выполняются.

Построим внешним образом на стороне AB треугольника ABC треугольник ABC_1 так, что $\angle C_1AB = 180° - \angle E$ и $\angle C_1BA = 180° - \angle F$. Аналогично построим точки A_1 и B_1 так, что $\angle A_1BC = 180° - \angle F$, $\angle A_1CB = 180° - \angle D$, $\angle B_1CA = 180° - \angle D$ и $\angle B_1AC = 180° - \angle E$. Покажем, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, причём эта точка — искомая точка O.

Пусть O_1 — точка пересечения описанных окружностей треугольников AB_1C и A_1BC. Тогда $\angle AO_1C = \angle F$ и $\angle BO_1C = \angle E$. Из этого легко выводится, что описанная окружность треугольника ABC_1 тоже проходит через точку O_1 и $\angle AO_1B = D$. Значит, $\angle AO_1B_1 = \angle ACB_1 = 180° - \angle D = \angle BCA_1 = \angle BO_1A_1$. Поэтому прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O_1. Аналогично доказывается, что прямая CC_1 проходит через точку O_1. Уже проведённые вычисления углов показывают, что O_1 — это искомая точка O.

З-ча **3**. На консультации было 20 школьников и разбиралось 20 задач. Оказалось, что каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решённых им задач и все задачи были разобраны.

Реш **3**. Начнём разбор задач с того, что произвольный школьник расскажет одну из решённых им задач. Пусть этот школьник решил задачи a_1 и a_2, а рассказал он задачу a_1. Тогда есть ровно один школьник, который тоже решил задачу a_2 (и ещё задачу a_3). Этот школьник расскажет задачу a_2. Затем школьник, который решил задачи a_3 и a_4, расскажет задачу a_3 и т.д. Так мы дойдём до n-го школьника, который решил задачи a_n и a_k, где $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Нужно понять, что делать, если $n < 20$. Ясно, что $k = 1$. Действительно, задачу a_k, где $2 \leqslant k \leqslant n-1$, решили два школьника с номерами $k-1$ и k. Пусть n-й школьник расскажет задачу a_n. Для оставшихся школьников и оставшихся задач выполняется то же самое условие: каждый из школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Поэтому можно повторить то же самое и т.д.

З-ча **4**. Проекцией точки A из точки O на плоскость P называется точка A', в которой прямая OA пересекает плоскость P. Проекцией треугольника называется фигура, состоящая из всех проекций его точек. Какими фигурами может быть проекция треугольника, если точка O не лежит в его плоскости?

Реш **4**. Пусть ABC — данный треугольник. Рассмотрим полный трёхгранный угол $OABC$ с вершиной O, состоящий из двух трёхгранных углов (рёбрами одного угла являются лучи OA, OB, OC, а рёбрами другого — их продолжения). Проекция треугольника ABC на плоскость P совпадает с пересечением плоскости P и полного трёхгранного угла $OABC$. В зависимости от взаимного расположения плоскости и трёхгранного угла возникают следующие варианты.

1) Плоскость P параллельна двум рёбрам и пересекает третье. В проекции получается угол.

2) Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём оба — с одной стороны от вершины O. В проекции получается полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми и пересекающими их третьей прямой.

3) Плоскость P параллельна одному ребру и пересекает два других, причём по разные стороны от вершины O. В проекции получаются два угла, у которых сторона одного служит продолжением стороны другого, а две другие стороны параллельны и противоположно направлены.

4) Плоскость P пересекает все три ребра, причём все три — с одной стороны от вершины O. В проекции получается треугольник.

5) Плоскость P пересекает все три ребра, причём два — с одной стороны от вершины O, а одно — с другой. В проекции получается фигура, состоящая из угла и бесконечной фигуры, которая ограничена продолжениями сторон этого угла и прямой, их пересекающей.

З-ча **5**. При делении многочлена $x^{1951} - 1$ на $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ получается частное и остаток. Найти в частном коэффициент при x^{14}.

Реш **5**. О т в е т : -1. Равенства $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2+1)(x^2+x+1)$ и $x^{12} - 1 = (x-1)(x^2+x+$

$1)(x^3+1)(x^2+1)(x^4-x^2+1)$ показывают, что

$$x^4+x^3+2x^2+x+1 = \frac{x^{12}-1}{(x-1)(x^3+1)(x^4-x^2+1)} = \\ = \frac{x^{12}-1}{x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1}.$$

Поэтому поделить многочлен $x^{1951}-1$ на $x^4+x^3+2x^2+x+1$ — это то же самое, что сначала поделить его на $x^{12}-1$, а потом умножить на $x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1$. Но

$$\frac{x^{1951}-1}{x^{12}-1} = x^{1939}+x^{1927}+x^{1915}+\cdots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1},$$

поэтому искомый коэффициент равен коэффициенту при x^{14} в произведении

$$\left(x^{1939}+\cdots+x^{19}+x^7+\frac{x^7-1}{x^{12}-1}\right)(x^8-x^7-x^6+2x^5-2x^3+x^2+x-1).$$

9 — 10 классы

З-ча **1**. Все рёбра треугольной пирамиды равны a. Найти наибольшую площадь, которую может иметь ортогональная проекция этой пирамиды на плоскость.

Реш **1**. Ответ: $a^2/2$. Проекция тетраэдра может быть треугольником или четырехугольником. В первом случае она является проекцией одной из граней, поэтому ее площадь не превосходит $\sqrt{3}a^2/4$. Во втором случае диагонали четырехугольника являются проекциями рёбер тетраэдра, поэтому площадь ортогональной проекции, равная половине произведения длин диагоналей на синус угла между ними, не превосходит $a^2/2$; равенство достигается, когда пара противоположных рёбер тетраэдра параллельна данной плоскости. Остаётся заметить, что $\sqrt{3}a^2/4 < a^2/2$.

З-ча **2**. Имеется несколько чисел, каждое из которых меньше чем 1951. Общее наименьшее кратное любых двух из них больше чем 1951. Доказать, что сумма обратных величин этих чисел меньше 2.

Реш **2**. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — данные числа. Количество членов ряда 1, 2, 3, ..., 1951, делящихся на a_k, равно $\left[\frac{1951}{a_k}\right]$. По условию наименьшее общее кратное любых двух из чисел $a_1, \ldots, a_n$ больше 1951, поэтому среди чисел 1, 2, ..., 1951 нет ни одного числа, делящегося одновременно на два из чисел $a_1, \ldots, a_n$. Поэтому число членов последовательности 1, 2, ..., 1951, делящихся хотя бы на одно из чисел $a_1, \ldots, a_n$, равно

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right]+\left[\frac{1951}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{1951}{a_n}\right].$$

Но в последовательности 1, 2, ..., 1951 всего 1951 членов, поэтому

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right]+\left[\frac{1951}{a_2}\right]+\cdots+\left[\frac{1951}{a_n}\right] \leqslant 1951.$$

Учитывая, что $\left[\frac{1951}{a_k}\right] > \frac{1951}{a_k}-1$, получаем

$$\left(\frac{1951}{a_1}-1\right)+\left(\frac{1951}{a_2}-1\right)+\cdots+\left(\frac{1951}{a_n}-1\right) < 1951,$$

т.е.

$$\frac{1951}{a_1}+\frac{1951}{a_2}+\frac{1951}{a_3}+\cdots+\frac{1951}{a_n} < 1951+n < 2\cdot 1951.$$

Сокращая обе части на 1951, получаем требуемое.

Замечание. *Число 1951 можно заменить на любое другое натуральное число $N \geqslant 4$.*

З-ча **3**. Автобусный маршрут содержит 14 остановок (считая две конечные). В автобусе одновременно могут ехать не более 25 пассажиров. Доказать, что во время поездки автобуса из одного конца в другой

а) найдутся восемь различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, таких, что ни один пассажир не едет от A_1 до B_1, ни один пассажир не едет от A_2 до B_2, ни один пассажир не едет от A_3 до B_3 и ни один пассажир не едет от A_4 до B_4;

б) может оказаться, что пассажиры едут таким образом, что не существует 10 различных остановок A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4, A_5, B_5, которые обладали бы аналогичными свойствами.

Реш **3**. а) Будем учитывать только тех пассажиров, которые находятся в автобусе, когда он едет от 7-й остановки до 8-й. Это будут в точности те пассажиры, которые едут от остановки с номером $i \leqslant 7$ до остановки с номером $j \geqslant 8$. Возьмём квадрат 7×7, строки которого занумерованы числами $1, \dots, 7$, а столбцы — числами $8, \dots, 14$. Если в автобусе есть пассажир, едущий от остановки с номером $i \leqslant 7$ до остановки с номером $j \geqslant 8$, то отметим в квадрате клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. Количество отмеченных клеток по условию не больше 25, поэтому есть по крайней мере $24 = 4 \cdot 6$ непомеченные клетки.

Докажем, что в указанном квадрате 7×7 можно выделить строки $A_1, \dots, A_4$ и столбцы $B_1, \dots, B_4$ так, что на пересечении строки A_i и столбца B_j стоит неотмеченная клетка. Сначала докажем, что можно выделить одну строку и один столбец так, что на их пересечении стоит неотмеченная клетка, а после их вычёркивания остаётся не менее $15 = 3 \cdot 5$ неотмеченных клеток. Если в каждом столбце и в каждой строке не более 5 неотмеченных клеток, то можно взять любую неотмеченную клетку и выделить содержащие её строку и столбец. Действительно, в этом случае выделенные строка и столбец содержат не более 9 неотмеченных клеток. Если в какой-то строке (столбце) стоит 6 неотмеченных клеток, то среди столбцов (строк), проходящих через неотмеченные клетки этой строки (столбца) найдётся столбец (строка), в котором стоит не более 4 отмеченных точек. Можно выделить эти строку и столбец. Если в какой-то строке (столбце) все клетки неотмеченные, то найдётся столбец (строка), в котором стоит не более 3 неотмеченных точек. Можно выделить эти строку и столбец.

Аналогично можно доказать, что в полученном квадрате 6×6 можно выделить строку и столбец, на пересечении которых стоит неотмеченная клетка, так, чтобы после их вычёркивания осталось не менее $8 = 2 \cdot 4$ неотмеченных клеток. Затем в полученном квадрате 6×6 можно выделить строку и столбец, на пересечении которых стоит неотмеченная клетка, так, чтобы после их вычёркивания осталось не менее $3 = 1 \cdot 3$ неотмеченных клеток (нам достаточно, чтобы осталась одна неотмеченная клетка).

б) Пусть от каждой остановки с номерами $1, 2, \dots, 10$ до каждой другой остановки с этими номерами едет ровно один пассажир, а дальше автобус едет пустым. Посчитаем, сколько пассажиров находится в автобусе, когда он едет от остановки с номером k до остановки с номером $k+1$, где $1 \leqslant k \leqslant 9$. Это будут в точности те пассажиры, которые вошли на остановках с номерами $1, 2, \dots, k$ и выйдут на остановках с номерами $k+1$, $k+2$, $\dots$, $10 = k + (10-k)$. Всего таких пассажиров будет $k(10-k)$. Ясно, что $k(10-k) \leqslant 25$ (больше всего пассажиров в автобусе будет, когда он едет от остановки 5 до остановки 6). Если нам задано 10 различных остановок, то остановки с номерами 11, 12, 13, 14 могут входить не более чем в 4 пары этих остановок; в пятую пару входят остановки с номерами $1, 2, \dots, 10$, а для любой такой пары остановок найдётся пассажир, который едет от одной остановки до другой.

З-ча **4**. Окружность обладает тем свойством, что внутри неё можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая вершина треугольника описывала эту окружность. Найти замкнутую непересекающуюся кривую, отличную от окружности, внутри которой также можно двигать правильный треугольник так, чтобы каждая его вершина описывала эту кривую.

Реш **4**. Возьмём окружность, радиус которой равен стороне правильного треугольника, отрежем от неё два сегмента, хорды которых стягивают угол 120°. Сложим их этих двух сегментов фигуру, приложив друг к другу их хорды. Граница этой фигуры обладает требуемым свойством. Действительно, поместим правильный треугольник в эту фигуру так, как показано на рис.??? Затем будем поворачивать треугольник по часовой стрелке вокруг точки O_1. После поворота на 60° будем поворачивать треугольник по часовой стрелке вокруг точки O_2 и т.д. После шести таких поворотов (трёх пар поворотов вокруг O_1 и O_2) треугольник вернётся в исходное положение, причём каждая его вершина опишет всю кривую.

XV олимпиада (1952)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. В ΔABC вписана окружность, которая касается его сторон в точках L, M и N. Докажите, что ΔLMN всегда остроугольный (независимо от вида ΔABC).

Реш **1**. Пусть L, M и N лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Треугольники BNL и CLM равнобедренные; углы при их основаниях равны $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle B)$ и $\frac{1}{2}(180^\circ - \angle C)$. Поэтому $\angle NLM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) < 90^\circ$. Аналогично доказывается, что остальные углы треугольника NLM острые.

З-ча **2**. Докажите тождество

$$(ax + by + cz)^2 + (bx + cy + az)^2 + (cx + ay + bz)^2 =$$
$$= (cx + by + az)^2 + (bx + ay + cz)^2 + (ax + cy + bz)^2.$$

Реш **2**. Легко проверить, что оба выражения равны

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) + 2(xy + yz + zx)(ab + bc + ca).$$

З-ча **3**. Если все 6 граней параллелепипеда — равные между собой параллелограммы, то они суть ромбы. Докажите.

Реш **3**. Пусть из вершины параллелепипеда выходят рёбра длиной a, b, c. Тогда одна грань является параллелограммом со сторонами a и b, а другая грань — параллелограммом со сторонами b и c. Эти параллелограммы равны, поэтому $a = c$. Аналогично доказывается, что $a = b = c$.

З-ча **4**. Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/час. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/час. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно (если он идёт пешком с той же скоростью, что A и B)?

Реш **4**. Чтобы A и B прибыли в пункт N, они должны пройти пешком одно и то же расстояние x и проехать на велосипеде одно и то же расстояние $15 - x$. Тогда C до встречи с B тоже должен пройти пешком расстояние x. Поэтому C до встречи с A проедет на велосипеде $15 - 2x$, а после этого A проедет на велосипеде $15 - x$. Всего A и B вместе проедут на велосипеде $30 - 3x$. За это же время B пройдёт пешком x, поэтому $\frac{30-3x}{15} = \frac{x}{6}$, т.е. $x = 60/11$. B до встречи с C едет $\frac{15-x}{15} = \frac{1}{15} \cdot \frac{105}{11} = \frac{7}{11}$ час, а C до встречи с B идёт $\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{60}{11} = \frac{10}{11}$ час, поэтому C должен выйти из M за $\frac{3}{11}$ час до того, как A и B отправятся в путь из M.

8 класс

З-ча **1**. Докажите, что если ортоцентр делит высоты треугольника в одном и том же отношении, то этот треугольник — правильный.

Реш **1**. Пусть H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. По условию $A_1H \cdot BH = B_1H \cdot AH$. С другой стороны, так как точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB, то $A_1H \cdot AH = B_1H \cdot BH$. Следовательно, $AH = BH$ и $A_1H = B_1H$, а значит, $AC = BC$. Аналогично $BC = AC$.

З-ча **2**. Докажите тождество

$$(ax + by + cz + du)^2 + (bx + cy + dz + au)^2 + (cx + dy + az + bu)^2 +$$
$$+ (dx + ay + bz + cu)^2 =$$
$$= (dx + cy + bz + au)^2 + (cx + by + az + du)^2 + (bx + ay + dz + cu)^2 +$$
$$+ (ax + dy + cz + bu)^2.$$

Реш **2**. Легко проверить, что оба выражения равны

$$(x^2+y^2+z^2+u^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)+2(xy+yz+zu+ux)(ab+bc+cd+da)+4(xz+yu)(ac+bd).$$

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. Два человека A и B должны попасть как можно скорее из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/час. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/час. A отправляется в путь пешком, а B едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N и M. Дальше B идёт пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передаёт ему велосипед, на котором тот и приезжает в N.

Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы время, затраченное A и B на дорогу в N, было наименьшим (C идёт пешком с той же скоростью, что A и B; время, затраченное на дорогу, считается от момента выхода A и B из M до момента прибытия последнего из них в N).

Реш **4**. Чтобы A и B затратили на дорогу наименьшее время, они должны прибыть в N одновременно, т.е. они должны пройти пешком одинаковые расстояния. Действительно, пусть A проходит пешком расстояние x и проезжает на велосипеде $15-x$, а B проходит y и проезжает $15-y$. Тогда время, затраченное A, равно $\frac{x}{6}+\frac{15-x}{15}=1+\frac{x}{10}$, а время, затраченное B, равно $1+\frac{y}{10}$. Нас интересует меньшее из этих чисел; оно должно быть наименьшим. За то же самое время, за которое A проходит пешком расстояние x, B и C успевают проехать на велосипеде расстояние $(15-y)+(15-y-x)$. Поэтому $\frac{30-x-2y}{15}=\frac{x}{6}$, т.е. $7x+4y=60$. Прямая $x=y$ пересекает прямую $7x+4y=60$ в точке $(11/10, 11/10)$. Для любой другой точки прямой $7x+4y=60$ координата x или координата y будет больше.

Задача о том, когда должен выйти C, чтобы A и B прибыли одновременно, — это в точности задача 4 для 7 класса.

9 класс

З-ча **1**. Дана геометрическая прогрессия, знаменатель которой — целое число (не равное 0 и -1). Докажите, что сумма любого числа произвольно выбранных её членов не может равняться никакому члену этой прогрессии.

Реш **1**. Каждый член геометрической прогрессии представляется в виде aq^n, $n \geqslant 0$. Случай, когда $q=1$, очевиден, поэтому будем считать, что $q \neq 1$. Предположим, что существуют различные целые неотрицательные числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$ ($m \geqslant 2$), для которых

$$aq^{k_1}+aq^{k_2}+\cdots+aq^{k_m}=aq^{k_{m+1}}. \quad (1)$$

Пусть $l_1<l_2<\cdots<l_{m+1}$ — это числа $k_1, k_2, \ldots, k_{m+1}$, записанные в порядке возрастания. Перепишем равенство (1) в виде

$$aq^{l_1}=\pm aq^{l_2}\pm\cdots\pm aq^{l_{m+1}}.$$

После сокращения на aq^{l_1} получим

$$1=q^{l_2-l_1}(1+q^{l_3-l_2}+\cdots+q^{l_{m+1}-l_2}).$$

Левая часть равенства равна 1, а правая часть делится на целое число $q^{l_2-l_1}$, абсолютная величина которого строго больше 1. Получено противоречие.

З-ча **2**. Даны 3 скрещивающиеся прямые. Докажите, что они будут общими перпендикулярами к своим общим перпендикулярам.

Реш **2**. Пусть $a' \perp b$ и $a' \perp c$, $b' \perp c$ и $b' \perp a$, $c' \perp a$ и $c' \perp b$. Тогда $a \perp b'$ и $a \perp c'$, $b \perp c'$ и $b \perp a'$, $c \perp a'$ и $c \perp b'$.

З-ча **3**. Докажите, что

$$\left|\frac{x-y}{1-xy}\right|<1,$$

если $|x|<1$ и $|y|<1$.

Реш **3**. По условию $1-x>0$, $1+x>0$, $1-y>0$ и $1+y>0$. Поэтому $(1-x)(1+y)>0$ и $(1+x)(1-y)>0$, т.е. $1-x+y-xy>0$ и $1+x-y-xy>0$. Следовательно, $1-xy>x-y$ и $1-xy>y-x$. Кроме того, $1-xy=|1-xy|$.

З-ча **4**. ΔABC разбит прямой BD на два треугольника. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в ΔABD и ΔDBC, больше радиуса окружности, вписанной в ΔABC.

Реш 4. Пусть r, r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, ABD и BCD, p, p_1 и p_2 — их полупериметры, S, S_1 и S_2 — их площади. Тогда $S = S_1 + S_2$, $S = pr$, $S_1 = p_1 r_1$ и $S_2 = p_2 r_2$. Поэтому $r = \frac{p_1}{p} r_1 + \frac{p_2}{p} r_2$. Но $BD < BC + CD$, поэтому $p_1 < p$; аналогично $p_2 < p$. Следовательно, $r < r_1 + r_2$.

З-ча 5. Дана последовательность целых чисел, построенная следующим образом:

a_1 — произвольное трёхзначное число,

a_2 — сумма квадратов его цифр,

a_3 — сумма квадратов цифр числа a_2 и т.д. Докажите, что в последовательности a_1, a_2, a_3, ... обязательно встретится либо 1, либо 4.

Реш 5. Прежде всего заметим, что $a_2 \leqslant 9^2 \cdot 3 = 243$, а значит, $a_3 \leqslant 2^2 + 9^2 \cdot 2 = 166$. Если $100 \leqslant a_3 \leqslant 166$, то $a_4 \leqslant 1 + 6^2 + 9^2 = 118$, а если $100 \leqslant a_4 \leqslant 166$, то $a_5 \leqslant 2 + 64 < 100$. Поэтому достаточно проверить требуемое утверждение лишь для чисел, не превосходящих 99. Это делается непосредственной проверкой. Мы будем выписывать последовательность до тех пор пока не встретится 1, 4 или число, уже встречавшееся ранее. При этом мы будем учитывать, что перестановка цифр и добавление (удаление) нуля не влияет на дальнейшие члены последовательности. В результате получим следующие последовательности: 2, 4; 3, 9, 81, 65, 61, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4; 5, 25, 29, 85; 6, 36, 45, 41, 17, 50; 7, 49, 97, 130, 10; 8, 64, 42; 11, 2; 12, 5; 15, 26, 40; 19, 82, 68, 100; 27, 53, 34, 25; 33, 36; 35, 34; 38, 73; 39, 90; 44, 32; 47, 65; 48, 80; 55, 50; 57, 74; 59, 106; 66, 72; 67, 85; 69, 117, 51; 77, 98; 78, 113, 11; 88, 128, 69; 99, 162, 41.

10 класс

З-ча 1. Найдите соотношение между

$$\arcsin \cos \arcsin x \text{ и } \arccos \sin \arccos x.$$

Реш 1. Ответ: $\arcsin \cos \arcsin x + \arccos \sin \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Пусть $\arcsin \cos \arcsin x = \alpha$ и $\arccos \sin \arccos x = \beta$. Тогда $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi/2$. Действительно, $0 \leqslant \cos \arcsin x \leqslant 1$, поскольку $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, и $0 \leqslant \sin \arccos x \leqslant 1$, поскольку $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Далее, $\sin \alpha = \cos \arcsin x$, поэтому $\arcsin x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ и $\sin\left[\pm\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \pm \cos \alpha$; $\cos \beta = \sin \arccos x$, поэтому $\arccos x = \frac{\pi}{2} \mp \beta$ и $x = \cos\left(\frac{\pi}{2} \mp \beta\right) = \pm \sin \beta$. Из того, что $\cos \alpha = \sin \beta (= \pm x)$, следует, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

З-ча 2. Докажите, что при целом $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$

$$2^n > (1-x)^n + (1+x)^n.$$

Реш 2. Применим индукцию по n. При $n = 2$ получаем $(1-x)^2 + (1+x)^2 = 2(1+x^2) < 4$. Предположим теперь, что $(1-x)^n + (1+x)^n < 2^n$. Тогда

$$(1-x)^{n+1} + (1+x)^{n+1} < ((1-x)^n + (1+x)^n)((1-x) + (1+x)) < 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}.$$

З-ча 3. В трёхгранный угол с вершиной S вписана сфера с центром в точке O. Докажите, что плоскость, проходящая через три точки касания, перпендикулярна к прямой SO.

Реш 3. Пусть A, B и C — точки касания сферы с гранями. Радиус OA перпендикулярен касательной SA, поэтому $\angle SAO = 90^\circ$. Аналогично $\angle SBO = \angle SCO = 90^\circ$. В прямоугольных треугольниках SAO, SBO и SCO катеты AO, BO и CO равны (они равны радиусу сферы), поэтому равны и сами треугольники. Следовательно, проекции вершин A, B и C на гипотенузу SO совпадают. Но это как раз и означает, что прямая SO перпендикулярна плоскости ABC.

З-ча 4. Если при любом положительном p все корни уравнения

$$ax^2 + bx + c + p = 0$$

действительны и положительны, то коэффициент a равен нулю. Докажите.

Реш 4. Предположим, что $a > 0$. Тогда при больших положительных p дискриминант $D = b^2 - 4ac - 4ap$ отрицателен, поэтому данное уравнение вообще не имеет действительных корней. Предположим, что $a < 0$. Тогда при больших положительных p произведение корней, равное $\frac{c+p}{a}$, отрицательно.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Решить систему пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными:

$$\begin{cases} 1 - x_1x_2 & = & 0, \\ 1 - x_2x_3 & = & 0, \\ 1 - x_3x_4 & = & 0, \\ \dots & & \dots \\ 1 - x_{14}x_{15} & = & 0, \\ 1 - x_{15}x_1 & = & 0. \end{cases}$$

Реш **1**. Ответ: $x_1 = x_2 = \dots = x_{15} = \pm 1$. Ясно, что $x_2 \neq 0$, поэтому из первого и второго уравнений получаем $x_1 = x_3$. Из второго и третьего уравнений получаем $x_2 = x_4$ и т.д. Кроме того, из первого и последнего уравнений получаем $x_{15} = x_2$. В итоге получаем $x_1 = x_3 = \dots = x_{15} = x_2 = x_4 = \dots = x_{14}$. Поэтому из первого уравнения получаем $x_1^2 = 1$, т.е. $x_1 = \pm 1$. Очевидно, что оба указанных в ответе набора неизвестных действительно являются решениями системы.

З-ча **2**. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соблюдено условие: $AB + CD = BC + DA$. Докажите, что окружность, вписанная в ΔABC, касается окружности, вписанной в ΔACD.

Реш **2**. Пусть K и L — точки касания со стороной AC окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC. Тогда $2AK = AB + AC - BC$ и $2AL = AD + AC - DC$. Поэтому из равенства $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AK = AL$, т.е. точки K и L совпадают.

З-ча **3**. Докажите, что если квадрат числа начинается с $0,999\dots9$ (100 девяток), то и само число начинается с $0,999\dots9$ (100 девяток).

Реш **3**. Если $0 < a < 1$, то $0 < a^2 < a < 1$. По условию $1 > a^2 \geqslant 0,\underbrace{9\dots9}_{100}$. Поэтому $1 > a > 0,\underbrace{9\dots9}_{100}$ (предполагается, что число a положительно).

З-ча **4**. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место вершин C остроугольных треугольников ABC.

Реш **4**. Возьмём окружность S с диаметром AB и проведём в точках A и B касательные l_A и l_B к этой окружности. Искомые точки лежат строго внутри полосы, ограниченной прямыми l_A и l_B, и строго вне окружности S.

8 класс

З-ча **1**. Вычислить с шестьюдесятью десятичными знаками

$$\sqrt{0,\underbrace{999\dots9}_{60}}.$$

Реш **1**. Если $0 < a < 1$, то $0 < a < \sqrt{a} < 1$. По условию $a = 0,\underbrace{9\dots9}_{60}$. Поэтому $1 > \sqrt{a} > 0,\underbrace{9\dots9}_{60}$. Значит, $\sqrt{a} = 0,\underbrace{9\dots9}_{60}\dots$

З-ча **2**. Из точки C проведены касательные CA и CB к окружности O. Из произвольной точки N окружности опущены перпендикуляры ND, NE, NF соответственно на прямые AB, CA и CB. Докажите, что ND есть среднее пропорциональное между NE и NF.

Реш **2**. Прямоугольные треугольники NBD и NAE, NBF и NAD подобны, поскольку $\angle NBD = \angle NAE$ и $\angle NBF = \angle NAD$. Следовательно, $NB : NA = ND : NE$ и $NB : NA = NF : ND$, а значит, $ND : NE = NF : ND$, т.е. $ND^2 = NE \cdot NF$.

З-ча **3**. Имеются семь жетонов с цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Докажите, что ни одно семизначное число, составленное посредством этих жетонов, не делится на другое.

Реш **3**. Пусть a и b — семизначные числа, составленные посредством этих жетонов. Предположим, что a делится на b и $a \neq b$. Тогда $a - b$ тоже делится на b. Ясно, что $\frac{a-b}{b} \leqslant 7$. С другой стороны, $a - b$ делится на 9, а b не делится на 9. Поэтому $\frac{a-b}{b}$ делится на 9.

З-ча **4**. 99 прямых разбивают плоскость на n частей. Найдите все возможные значения n, меньшие 199.

Реш **4**. Индукцией по m легко доказать, что m прямых разбивают плоскость на $1+m+x$ частей, где x — количество точек пересечения этих прямых с учётом их кратностей (это означает, что точка пересечения k прямых считается за $k-1$ точек пересечения).

Используя эту формулу и индукцию по m, можно доказать, что если среди данных m прямых есть три прямые, пересекающиеся в трёх различных точках, то эти m прямых разбивают плоскость по крайней мере на $2m+1$ частей. База индукции: $m=3$; далее мы пользуемся тем, что проведение каждой новой прямой добавляет по крайней мере две новые части.

Обращаясь к условию задачи, мы видим, что нас интересуют только конфигурации прямых, среди которых нет троек прямых, пересекающихся в трёх разных точках. Таким образом, либо все 99 прямых параллельны, либо все 99 прямых пересекаются в одной точке, либо 98 прямых параллельны и одна прямая их пересекает. Первая конфигурация разбивает плоскость на 100 частей, а обе остальные — на 198 частей.

9 класс

З-ча **1**. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1-x_1x_2 &= 0,\\ 1-x_2x_3 &= 0,\\ 1-x_3x_4 &= 0,\\ \dots & \dots\\ 1-x_{n-1}x_n &= 0,\\ 1-x_nx_1 &= 0. \end{cases}$$

Реш **1**. Ответ: $x_1=x_2=\dots=x_n=\pm1$ при нечётном n, $x_1=x_3=\dots=x_{n-1}=a$ и $x_2=x_4=\dots=x_n=\frac{1}{a}$ $(a\neq0)$ при чётном n. Для нечётного n решение фактически приведено в решении задачи 1 для 7 класса. При чётном n точно так же получаем $x_1=x_3=\dots=x_{n-1}$, $x_2=x_4=\dots=x_{n-2}$ и $x_2=x_n$. Очевидно, что указанные в ответе наборы неизвестных являются решениями данной системы уравнений.

З-ча **2**. Поместить в полый куб с ребром a три цилиндра диаметра $\frac{a}{2}$ и высоты a так, чтобы они не могли менять своего положения внутри куба.

Реш **2**. Если основания цилиндра лежат на гранях куба, то направление оси цилиндра будет неизменным при всех его перемещениях внутри куба. Поместим теперь в куб два цилиндра так, чтобы их оси были параллельны двум перпендикулярным рёбрам куба. Радиусы цилиндров равны $a/4$, поэтому расстояние между их осями не может быть меньше $a/2$. С другой стороны, они расположены внутри полосы толщиной a между двумя параллельными плоскостями. Поэтому расстояние между осями не может быть больше $a/2$. Следовательно, ось каждого цилиндра может перемещаться лишь в направлении оси другого цилиндра. Переместим эти два цилиндра так, чтобы они касались куба боковыми поверхностями, и в образовавшийся зазор вставим третий цилиндр, ось которого перпендикулярна осям двух первых цилиндров. Новый цилиндр не сможет перемещаться, поскольку первый цилиндр позволяет двигаться его оси только в одном направлении, а второй цилиндр — только в перпендикулярном направлении. Аналогично доказывается, что первые два цилиндра теперь тоже не смогут перемещаться.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 8 класса.

З-ча **4**. В равнобедренном ΔABC $\angle ABC=20^\circ$. На равных сторонах CB и AB взяты соответственно точки P и Q такие, что $\angle PAC=50^\circ$ и $\angle QCA=60^\circ$. Докажите, что $\angle PQC=30^\circ$.

Реш **4**. Выберем на стороне BC точку R так, что $\angle CAR=60^\circ$. Пусть S — точка пересечения прямых CQ и AR (рис.???). Достаточно доказать, что QP — биссектриса угла SQR, равного 60°. Простые вычисления углов показывают, что $\angle APC=50^\circ$. Поэтому треугольник ACP равнобедренный, а значит, $PC=AC=SC$. Угол при вершине C равнобедренного треугольника PCS нам известен: он равен 20°, поэтому $\angle SPC=80^\circ$. Из этого следует, что $\angle RSP=40^\circ$. Остаётся заметить, что $\angle SRP=40^\circ$.

З-ча **5**. 200 учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а затем из отобранных 10 человек выбран самый низкий. С другой стороны, в каждом поперечном ряду выбран самый низкий ученик, а затем среди отобранных 20 выбран самый высокий. Кто из двоих окажется выше?

Реш **5**. Пусть A — самый низкий среди высоких, а B — самый высокий среди низких. Пусть C стоит на пересечении продольного ряда, в котором стоит A, и поперечного ряда, в котором стоит B. Тогда A не ниже C и C не ниже B, поэтому A не ниже B. (Если A и B разного роста, то A выше B.)

10 класс

З-ча **1**. Докажите, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \dots + a_1\cos x$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Реш **1**. Предположим, что сумма

$$\cos 32x + a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x + \dots + a_1\cos x$$

принимает только положительные значения при всех x. Заменив x на $x+\pi$, получим, что выражение

$$\cos 32x - a_{31}\cos 31x + a_{30}\cos 30x - \dots + a_2\cos 2x - a_1\cos x$$

принимает положительные значения при всех x. Сложив эти выражения, получим, что сумма

$$\cos 32x + a_{30}\cos 30x + \dots + a_4\cos 4x + a_2\cos 2x$$

принимает положительные значения при всех x. Затем повторим те же самые рассуждения, последовательно заменяя x на $x+\frac{\pi}{2}$, $x+\frac{\pi}{4}$, $x+\frac{\pi}{8}$, $x+\frac{\pi}{16}$. В результате получим, что $\cos 32x$ принимает положительные значения при всех x. Но при $x=\pi/32$ выражение $\cos 32x$ принимает значение -1. Получено противоречие.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса

З-ча **3**. Докажите, что ни при каком целом A многочлен $3x^{2n}+Ax^n+2$ не делится на многочлен $2x^{2m}+Ax^m+3$.

Реш **3**. Предположим, что многочлен $3x^{2n}+Ax^n+2$ делится на многочлен $2x^{2m}+Ax^m+3$. Тогда любой корень многочлена $2x^{2m}+Ax^m+3$ является также корнем многочлена $3x^{2n}+Ax^n+2$. Если x_i — корень многочлена $2x^{2m}+Ax^m+3$, то $x_i^m=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-24}}{4}=\alpha_{1,2}$. Можно считать, что $x_1^m=\alpha_1$ и $x_2^m=\alpha_2$. Пусть $\beta_{1,2}=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-24}}{6}$ — корни квадратного трёхчлена $3x^2+Ax+2$.

Случай 1. $A^2-24>0$.

В этом случае $|\alpha_1|\neq|\alpha_2|$, поэтому $x_1^n=\beta_1$ и $x_2^n=\beta_2$. С одной стороны, $|x_1x_2|=\sqrt[n]{|\beta_1\beta_2|}=\sqrt[n]{2/3}<1$, а с другой стороны $|x_1x_2|=\sqrt[m]{|\alpha_1\alpha_2|}=\sqrt[m]{3/2}>1$. Приходим к противоречию.

Случай 2. $A^2-24\leqslant 0$.

В этом случае $|\alpha_1|=|\alpha_2|=\sqrt{3/2}$ и $|\beta_1|=|\beta_2|=\sqrt{2/3}$. Поэтому, с одной стороны, $|x_1|=\sqrt[m]{|\alpha_1|}=\sqrt[2m]{3/2}>1$, а с другой стороны, $|x_1|=\sqrt[n]{|\beta_1|}=\sqrt[2n]{2/3}<1$. Снова приходим к противоречию.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

XVI олимпиада (1953)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что в трапеции сумма углов при меньшем основании больше, чем при большем.

Реш **1**. Разрежем трапецию на параллелограмм, одной из сторон которого служит меньшее основание трапеции, и треугольник. Сумма углов при большем основании трапеции равна сумме двух углов этого треугольника, поэтому она меньше 180°. Значит, сумма углов при меньшем основании больше 180°.

З-ча **2**. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое бы делилось на число, составленное из ста троек ($333\ldots33$).

Реш **2**. Ответ: $\underbrace{11\ldots1}_{300}$. Число $a_n = \underbrace{11\ldots1}_{n}$ делится на $\underbrace{33\ldots3}_{100}$ тогда и только тогда, когда n делится на 3 и a_n делится a_{100}. Покажем, что a_n делится на a_m тогда и только тогда, когда n делится на m. Ясно, что $9a_n = 10^n - 1$. Поэтому a_n делится на a_m тогда и только тогда, когда $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$. Пусть $n = dm + r$, где $0 \leqslant r < m$. Тогда

$$10^n - 1 = (10^{n-m} + 10^{n-2m} + \cdots + 10^{n-dm})(10^m - 1) + 10^r - 1.$$

Значит, $10^n - 1$ делится на $10^m - 1$ тогда и только тогда, когда n делится на m.

З-ча **3**. Разделить отрезок пополам с помощью угольника. (С помощью угольника можно проводить прямые и восстанавливать перпендикуляры, опускать перпендикуляры нельзя.)

Реш **3**. Восставим перпендикуляр l к AB в точке A; отметим на нем точки C и D. Восставим далее перпендикуляр l' к AB в точке B, а затем проведём перпендикуляры к прямой l в точках C и D до их пересечения с l' соответственно в точках C' и D'. Обозначим через X точку пересечения прямых AD' и BD и через Y — точку пересечения прямых AC' и BC. Тогда прямая XY пересекает отрезок AB в его середине.

З-ча **4**. Докажите, что при любом целом положительном n число $n^2 + 8n + 15$ не делится на $n + 4$.

Реш **4**. Достаточно заметить, что $n^2 + 8n + 15 = (n + 4)^2 - 1$.

8 класс

З-ча **1**. Три окружности попарно касаются друг друга. Через три точки касания проводим окружность. Доказать, что эта окружность перпендикулярна к каждой из трёх исходных. (Углом между двумя окружностями в точке их пересечения называется угол, образованный их касательными в этой точке.)

Реш **1**. Пусть A, B, C — точки касания, A_1, B_1 и C_1 — центры данных окружностей, причём точки A, B и C лежат на отрезках B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно. Тогда $A_1B = A_1C$, $B_1A = B_1C$ и $C_1A = C_1B$. Из этого следует, что A, B и C — точки касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ с его сторонами. Действительно, пусть $A_1B = A_1C = x$, $B_1A = B_1C = y$ и $C_1A = C_1B = z$. Тогда, например, $x = \frac{A_1B_1 + A_1C_1 - B_1C_1}{2}$ и для точек касания вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ со сторонами A_1B_1 и A_1C_1 такое соотношение тоже выполняется. В результате получаем, что радиусы A_1B, B_1C и C_1A данных окружностей касаются описанной окружности треугольника ABC.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. Доказать неравенство

$$\frac{2 - \overbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}^{n \text{ раз}}}{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ раз}}} > \frac{1}{4}.$$

Реш **4**. Пусть $a = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n-1}$. Тогда $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n} = \sqrt{2 + a}$.

Таким образом, требуется доказать, что

$$\frac{2-\sqrt{2+a}}{2-a} > \frac{1}{4}.$$

Индукцией по n легко доказать, что $a < 2$. Поэтому следующие неравенства эквивалентны требуемому:

$$\begin{array}{lcl} 8-4\sqrt{2+a} & > & 2-a, \\ 6+a & > & 4\sqrt{2+a}. \end{array}$$

После возведения в квадрат получаем неравенство $36+12a+a^2 > 32+16a$, т.е. $(a-2)^2 > 0$.

9 класс

З-ча **1**. Найти геометрическое место точек, координаты которых (x, y) удовлетворяют соотношению $\sin(x+y) = 0$.

Реш **1**. Ответ: семейство прямых, заданных уравнениями вида $x+y = k\pi$, где k — произвольное целое число.

З-ча **2**. AB и A_1B_1 — два скрещивающихся отрезка. O и O_1 — соответственно их середины. Докажите, что отрезок OO_1 меньше полусуммы отрезков AA_1 и BB_1.

Реш **2**. Сложим равенства $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1A_1}$ и $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1B_1}$. Учитывая, что $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{0}$ и $\overrightarrow{O_1A_1} + \overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{0}$, получим $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1})$. Из этого требуемое неравенство следует очевидным образом, поскольку прямые AA_1 и BB_1 не могут быть параллельны.

З-ча **3**. Докажите, что многочлен вида $x^{200}y^{200}+1$ нельзя представить в виде произведения многочленов от одного только x и одного только y.

Реш **3**. Предположим, что существуют многочлены $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ и $g(y) = b_0y^m + b_1y^{m-1} + \dots + b_m$, для которых $f(x)g(y) = x^{200}y^{200}+1$. Положив $x = 0$, получим $a_ng(y) = 1$, т.е. $g(y) = 1/a_n$ при всех y. Положив $y = 0$, аналогично получим, что $f(x) = 1/b_m$ при всех x. Таким образом, $f(x)g(y) = \frac{1}{a_nb_m}$ — константа, а функция $x^{200}y^{200}+1$, очевидно, не является константой.

З-ча **4**. A — вершина правильного звёздчатого пятиугольника. Ломаная $AA_1BB_1CC_1DD_1EE_1$ является его внешним контуром. Прямые AB и DE продолжены до пересечения в точке F. Докажите, что многоугольник $ABB_1CC_1DED_1$ равновелик четырёхугольнику AD_1EF.

Реш **4**. Ясно, что $AB \| EC$ и $AC \| EF$. Поэтому четырёхугольник $ACEF$ — параллелограмм. В частности, $S_{EFA} = S_{ACE}$. Далее, $S_{AA_1BB_1CC_1DED_1} = S_{ACE} - S_{AED_1} + S_{ABB_1} + S_{EDC_1}$ и $S_{AD_1EF} = S_{EFA} + S_{AED_1}$ (рис.???). Но $S_{AED_1} = S_{ABB_1} = S_{EDC_1}$, поскольку треугольники AED_1, ABB_1 и EDC_1 равны.

З-ча **5**. См. задачу 4 для 8 класса.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса.

З-ча **2**. Дан прямой круговой конус и точка O. Найти геометрическое место вершин конусов, равных данному, с осями, параллельными оси данного конуса, и содержащих внутри данную точку O.

Реш **2**. Ответ: конус (с вершиной O), симметричный данному конусу относительно середины отрезка OS, где S — вершина данного конуса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 4 для 8 класса.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что наибольший общий делитель суммы двух чисел и их наименьшего общего кратного равен наибольшему общему делителю самих чисел.

Реш **1**. В наименьшее общее кратное чисел a и b входят только те простые делители, которые входят в a и b. Только они и могут входить в наибольший общий делитель суммы и наименьшего общего кратного. Поэтому достаточно проследить за степенью каждого простого множителя отдельно. Пусть $a = p^{\alpha}\dots$ и $b = p^{\beta}\dots$, причём $\alpha \leqslant \beta$. Тогда сумма чисел a и b имеет вид $p^{\alpha}\dots$, а их наименьшее общее кратное имеет вид $p^{\beta}\ldots$. Поэтому рассматриваемый наибольший общий делитель имеет вид $p^{\alpha}\ldots$. Наибольший общий делитель самих чисел a и b имеет такой же вид.

З-ча **2**. Около окружности описан четырёхугольник. Его диагонали пересекаются в центре этой окружности. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

Реш **2**. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром O. Если диагональ AC проходит через точку O, то прямая AC является осью симметрии четырёхугольника, поэтому $AB = AD$ и $CB = CD$. А если диагональ BD проходит через точку O, то $BA = BC$ и $DA = DC$.

З-ча **3**. В плоскости расположено 11 зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т.д. Наконец, последнее, одиннадцатое, колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

Реш **3**. Ответ: нет. Соседние колёса должны вращаться в противоположных направлениях. Поэтому колёса с номерами 1 и 11 должны вращаться в одном направлении (все колёса с нечётными номерами вращаются в одном направлении, а с чётными — в противоположном). С другой стороны, колёса с номерами 1 и 11 соседние, поэтому они должны вращаться в противоположных направлениях.

З-ча **4**. Тысяча точек является вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено ещё пятьсот точек так, что никакие три из пятисот не лежат на одной прямой. Данный тысячеугольник разрезан на треугольники таким образом, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников и эти треугольники не имеют никаких других вершин. Сколько получится треугольников при таком разрезании?

Реш **4**. Ответ: 1998. Сумма всех углов полученных треугольников равна сумме углов 1000-угольника и ещё 500 углов $360°$, соответствующих 500 внутренним точкам. Значит, сумма углов треугольников равна $998 \cdot 180° + 500 \cdot 360° = (998 + 2 \cdot 500)180°$. Поэтому количество полученных треугольников равно $998 + 2 \cdot 500 = 1998$.

З-ча **5**. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 &= 5. \end{cases}$$

Реш **5**. Ответ: $x_1 = x_3 = x_5 = 1,\ \ x_2 = x_4 = -1$.

Запишем сначала первое уравнение, потом второе, из которого вычтено первое, потом третье, из которого вычтено второе, и т.д.:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_4 + 2x_5 &= 1, \\ x_5 &= 1. \end{cases}$$

Теперь можно последовательно найти x_5, x_4, x_3, x_2, x_1.

8 класс

З-ча **1**. a, b, c и d — длины последовательных сторон четырёхугольника. Обозначим через S его площадь. Доказать, что

$$S \leqslant \frac{1}{4}(a+b)(c+d).$$

Реш **1**. Разрежем четырёхугольник на два треугольника со сторонами a и d, b и c. В результате получим $2S \leqslant ad + bc$. Остаётся доказать неравенство $2S \leqslant ac + bd$. Для этого поступим следующим образом. Отрежем треугольник со сторонами c и d, перевернём его и приложим к треугольнику со сторонами a и b так, чтобы получился четырёхугольник с последовательными сторонами a, b, c и d. Полученный четырёхугольник можно разрезать на два треугольника со сторонами a и c, b и d. Поэтому $2S \leqslant ac + bd$.

З-ча **2**. 1953 цифры выписаны по кругу. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 1953-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.

Реш **2**. Мы докажем требуемое утверждение, заменив 1953 на произвольное натуральное число n, делящееся на 3. Пусть число $a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^{n-1} = a_0 + 10a$ делится на 27. Достаточно доказать, что тогда число $a_1 + a_2 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^{n-2} + a_0 \cdot 10^{n-1} = a + 10^{n-1}a_0$ тоже делится на 27. Для этого достаточно проверить, что их разность $9a + (1 - 10^{n-1})a_0$ делится на 27. Пусть $x = 9a + (1 - 10^{n-1})a_0$ и $y = a_0 + 10a$. Число x делится на 27 тогда и только тогда, когда число $10x = 90a + (10 - 10^n)a_0 = 9y + (1 - 10^n)a_0$ делится на 27. Но если n делится на 3, то число $10^n - 1 = \underbrace{99\dots9}_{n}$ делится на 27.

З-ча **3**. На окружности даны точки $A_1, A_2, \dots, A_{16}$. Построим все возможные выпуклые многоугольники, вершины которых находятся среди точек $A_1, A_2, \dots, A_{16}$. Разобьём эти многоугольники на две группы. В первую группу будут входить все многоугольники, у которых A_1 является вершиной. Во вторую группу входят все многоугольники, у которых A_1 в число вершин не входит. В какой группе больше многоугольников?

Реш **3**. Ответ: во второй. Каждому многоугольнику, не содержащему точку A_1, можно сопоставить многоугольник, содержащий точку A_1, просто добавив A_1 к его вершинам. Обратная операция (отбрасывание вершины A_1) возможна лишь для многоугольников, число вершин которых не меньше 4.

З-ча **4**. В плоскости расположено n зубчатых колёс таким образом, что первое колесо сцеплено своими зубцами со вторым, второе — с третьим и т.д. Наконец, последнее колесо сцеплено с первым. Могут ли вращаться колёса такой системы?

Реш **4**. Ответ: при n чётном могут, при n нечётном не могут. См. решение задачи 3 для 7 класса.

З-ча **5**. Решить систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_{100} & = & 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \dots + 4x_{100} & = & 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \dots + 6x_{100} & = & 3, \\ \dots & & \dots \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \dots + 199x_{100} & = & 100. \end{array}\right.$$

Реш **5**. Ответ: $x_1 = x_3 = \dots = x_{99} = -1$, $x_2 = x_4 = \dots = x_{100} = 1$. Решение аналогично решению задачи 5 для 7 класса.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 2 для 8 класса.

З-ча **2**. В плоскости дан $\Delta A_1A_2A_3$ и прямая l вне его, образующая с продолжением сторон треугольника A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 соответственно углы α_3, α_1, α_2. Через точки A_1, A_2, A_3 проводятся прямые, образующие с l соответственно углы $2d - \alpha_1$, $2d - \alpha_2$, $2d - \alpha_3$. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке. Все углы отсчитываются от прямой l в одном направлении. (*d обозначает угол* $90°$ *— прим. ред.*)

Реш **2**. Введём на плоскости систему координат, выбрав прямую l в качестве оси x. Пусть (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) — координаты вершин A_1, A_1, A_3. Прямая A_2A_3 задаётся уравнением

$$\frac{x - a_2}{a_3 - a_2} = \frac{y - b_2}{b_3 - b_2}.$$

Прямая, проведённая через вершину A_1, задаётся уравнением, в котором отношение коэффициентов при x и y то же самое по абсолютной величине, но имеет противоположный знак. Таким образом, эта прямая задаётся уравнением

$$\frac{x - a_1}{a_3 - a_2} + \frac{y - b_1}{b_3 - b_2} = 0.$$

Напишем аналогично уравнения прямых, проведённых через вершины A_2 и A_3. Умножим левые части этих уравнений на $(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$, $(a_1 - a_3)(b_1 - b_3)$, $(a_2 - a_3)(b_2 - b_3)$ соответственно и сложим их. Легко проверить, что указанная сумма тождественно равна нулю. Из этого следует, что прямые, заданные этими уравнениями, пересекаются в одной точке.

З-ча **3**. Даны уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (1) и $-ax^2 + bx + c$ (2). Доказать, что если x_1 и x_2 — соответственно какие-либо корни уравнений (1) и (2), то найдётся такой корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, что либо $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$, либо $x_1 \geqslant x_3 \geqslant x_2$.

Реш **3**. При $x = x_1$ и при $x = x_2$ трёхчлен $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ принимает значения $-ax_1^2/2$ и $3ax_2^2/2$. Эти значения имеют разные знаки, поэтому один из корней трёхчлена расположен между x_1 и x_2.

З-ча **4**. Дан лист клетчатой бумаги размером 101×200 клеток. Начиная от какой-либо угловой клетки, идём по диагонали и каждый раз, доходя до границы, меняем направление движения по правилу, указанному на чертеже (???). Попадём ли мы когда-нибудь в одну из угловых клеток?

Реш **4**. Ответ: да, попадём.

Рассмотрим лист клетчатой бумаги размером 100×199 клеток, вершинами клеток которого служат центры клеток исходного листа. На новом листе бумаги отражение происходит по правилу отражения луча света. Каждый раз, когда луч доходит до края листа, будем спрямлять его, отражая лист симметрично относительно соответствующего края. В квадрате со стороной 19 900 луч идёт по диагонали; концы диагонали соответствуют угловым клеткам.

З-ча **5**. Разрезать куб на три равные пирамиды.

Реш **5**. В качестве вершины пирамид можно взять одну из вершин куба, а в качестве их оснований — три грани куба, не содержащие эту вершину.

10 класс

З-ча **1**. Найти корни уравнения

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

Реш **1**. Ответ: $1, 2, \dots, n$. Равенство

$$1 - \frac{k}{1} + \frac{k(k-1)}{2!} - \dots + (-1)^k \frac{k(k-1)\dots 2 \cdot 1}{k!} = (1-1)^k = 0$$

показывает, что числа $k = 1, 2, \dots, n$ являются корнями данного уравнения. Больше n корней это уравнение иметь не может, поскольку его степень равна n.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Пусть $x_0 = 10^9$, $x^n = \frac{x_{n-1}^2+2}{2x_{n-1}}$. Доказать, что $0 < x_{36} - \sqrt{2} < 10^{-9}$.

Реш **3**. Из тождества

$$x_n - \sqrt{2} = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{1}{2x_{n-1}}(x_{n-1} - \sqrt{2})^2$$

сразу получаем, что $x_n - \sqrt{2} > 0$. Кроме того, учитывая, что $\frac{x_{n-1}-\sqrt{2}}{x_{n-1}} < 1$, получаем

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{2}, \tag{1}$$

а, учитывая, что $x_{n-1} > 1$, получаем

$$x_n - \sqrt{2} < \frac{(x_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2}. \tag{2}$$

Из неравенства (1) следует, что $x_n - \sqrt{2} < \frac{x_0}{2^n}$. В частности, $x_{30} - \sqrt{2} < \frac{10^9}{2^{30}} = \left(\frac{10^3}{2^{10}}\right)^3 = \left(\frac{1000}{1024}\right)^3 < 1$. Теперь, воспользовавшись неравенством (2), получим $x_{31} - \sqrt{2} < 1/2$, $x_{32} - \sqrt{2} < 1/2^3$, $x_{33} - \sqrt{2} < 1/2^7$, $x_{34} - \sqrt{2} < 1/2^{15}$, $x_{35} - \sqrt{2} < 1/2^{31}$, $x_{36} - \sqrt{2} < 1/2^{63}$. Поэтому $x_{36} - \sqrt{2} < 1/2^{63} < 1/2^{30} < 1/10^9$.

З-ча **4**. См. задачу 5 для 9 класса.

З-ча **5**. На бесконечной шахматной доске стоит конь. Найти все клетки, куда он может попасть за $2n$ ходов.

Реш **5**. Пусть для определённости конь стоит на чёрной клетке. Все клетки, куда он может попасть за 2 хода, изображены на рис.??? Случай $n = 1$ исключительный. При $n > 1$ множество клеток, куда может попасть конь за $2n$ ходов, устроено следующим образом. Возьмём квадрат со стороной $8n + 1$ (конь стоит в центре этого квадрата). Отрежем от этого квадрата четыре уголка со стороной $2n$ (на рис.??? соответствующая фигура изображена для $n = 2$). За $2n$ ходов конь может попасть в точности во все чёрные клетки полученной фигуры.

Докажем это. Прежде всего заметим, что после нечётного числа ходов конь попадает на белую клетку, а после чётного — на чёрную. Индукцией по m несложно доказать, что если $m \geqslant 3$, то за m ходов конь попадает в любую клетку соответствующего цвета (чёрного при чётном m и белого при нечётном m) фигуры, которая получается при отрезании от квадрата со стороной $4m+1$ четырёх уголков со стороной m. При $m = 3$ это легко проверяется, а шаг индукции очевиден.

XVII олимпиада (1954)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Правильную шестиконечную звезду разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было сложить выпуклый многоугольник.

Реш **1**. См. рис.???

З-ча

2. Даны два выпуклых многоугольника $A_1A_2A_3A_4\ldots A_n$ и $B_1B_2B_3B_4\ldots B_n$. Известно, что $A_1A_2 = B_1B_2, A_2A_3 = B_2B_3, \ldots, A_nA_1 = B_nB_1$ и $n-3$ угла одного многоугольника равны соответственным углам другого. Будут ли многоугольники равны?

Реш **2**. Ответ: да, будут. Применим индукцию по n. При $n = 3$ имеем два треугольника, у которых соответственные стороны равны. Рассмотрим теперь два n-угольника, где $n \geqslant 4$. По условию у них есть пара равных соответственных углов. Отрежем от каждого многоугольника треугольник, две стороны которого заключают данный угол. Эти треугольники равны, поэтому к оставшимся $(n-1)$-угольникам можно применить предположение индукции. Действительно, отрезая от равных углов равные углы, мы получаем равные углы.

З-ча **3**. Определить четырёхзначное число, если деление этого числа на однозначное производится по следующей схеме:

```
_ × × × ×| ×
  × ×     ‾‾‾‾‾
  ‾‾‾‾‾     × × ×
   _  × ×
      × ×
      ‾‾‾
```

а деление этого же числа на другое однозначное производится по такой схеме:

```
_ × × × ×| ×
    ×     ‾‾‾‾‾
  ‾‾‾‾‾     × × ×
 _  × ×
      ×
    ‾‾‾‾‾
   _  × ×
      × ×
      ‾‾‾
```

Реш **3**. Ответ: 1014 (при делении на 2 и на 3), 1035 (при делении на 5 и на 9) или 1512 (при делении на 3 и на 7).

Вторая схема деления может быть только такой:

```
_ 1 × × ×| ×
    ×     ‾‾‾‾‾
  ‾‾‾‾‾     × × ×
 _  1 ×
      ×
    ‾‾‾‾‾
   _  × ×
      × ×
      ‾‾‾
```

Если данное число равно $\overline{1abc}$, то согласно второй схеме деления $10 + a - x = 1$. Число x не превосходит 9 и является произведением двух натуральных чисел, меньших 10. Кроме того, согласно первой схеме деления число $10 + a$ является произведением двух натуральных чисел, отличных от 1. Для a остаются три возможности: $a = 0$, 5 или 6. В первой схеме производится деление, соответственно, на 2 или 5, на 3 или 5, на 4. Во второй — на 3 или 9, 2 или 7, 3 или 5. Далее, $10b + c$ делится на число, на которое производится деление в первой схеме. Перебирая возникающие в результате варианты, находим подходящие четырёхзначные числа.

З-ча **4**. Существуют ли целые числа m и n, удовлетворяющие уравнению $m^2 + 1954 = n^2$?

Реш **4**. Ответ: нет, не существуют. Предположим, что $n^2 - m^2 = 1954$. Если одно из чисел m и n чётно, а другое нечётно, то число $n^2 - m^2$ нечётно. Поэтому оба числа m и n либо чётны, либо нечётны. Легко проверить, что тогда число $n^2 - m^2$ делится на 4. А число 1954 на 4 не делится.

З-ча **5**. Определить наибольшее значение отношения трёхзначного числа к числу, равному сумме цифр этого числа.

Реш **5**. Ответ: 100. Сумма цифр трёхзначного числа $100a + 10b + c$ равна $a + b + c$. Ясно, что $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} \leqslant 100$. Кроме того, для числа 100 указанное отношение равно 100.

8 класс

З-ча **1**. Из квадрата размером 3 на 3 вырезать одну фигуру, которая представляет развёртку полной поверхности куба, длина ребра которого равна 1.

Реш **1**. Если мы возьмём квадрат со стороной 1, приложим к нему 4 квадрата со стороной 1 и к каждой из противоположных сторон этих четырёх квадратов приложим равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1, то в результате получим фигуру, которая представляет собой требуемую развёртку. Эту фигуру можно вырезать из квадрата со стороной $2\sqrt{2} < 3$.

З-ча **2**. Из произвольной внутренней точки O выпуклого n-угольника опущены перпендикуляры на стороны (или их продолжения). На каждом перпендикуляре от точки O по направлению к стороне построен вектор, длина которого равна половине длины той стороны, на которую опущен перпендикуляр. Определить сумму построенных векторов.

Реш **2**. Если мы повернём указанные векторы на $90°$ и умножим их на 2, то они превратятся в векторы сторон многоугольника. Сумма векторов сторон многоугольника равна $\overrightarrow{0}$, поэтому сумма исходных векторов тоже равна $\overrightarrow{0}$.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

З-ча **5**. Найти все решения системы уравнений

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+y\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)+z\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right)=0,$$

где $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Реш **5**. Ответ: $y = -3x$, $z = 2x$ (x — произвольное число).

Докажем, что указанная бесконечная система уравнений эквивалентна системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 4x+2y+z&=0. \end{aligned}$$

Во-первых, если мы вычтем из первого уравнения второе уравнение, умноженное на $\frac{1}{2^{n+2}}$, то получим n-е уравнение исходной системы. Во-вторых, уже из первых двух уравнений исходной системы

$$\begin{aligned} x\left(1-\frac{1}{2}\right)+y\left(1-\frac{1}{4}\right)+z\left(1-\frac{1}{8}\right)&=0,\\ x\left(1-\frac{1}{4}\right)+y\left(1-\frac{1}{8}\right)+z\left(1-\frac{1}{16}\right)&=0 \end{aligned}$$

следуют указанные два уравнения. Действительно, вычтя из первого уравнения второе, получим $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} + \frac{z}{16} = 0$. Прибавив это уравнение ко второму уравнению, получим $x + y + z = 0$.

9 класс

З-ча **1**. Доказать, что если

$$\begin{aligned} x_0^4 + a_1x_0^3 + a_2x_0^2 + a_3x_0 + a_4 &= 0,\\ 4x_0^3 + 3a_1x_0^2 + 2a_2x_0 + a_3 &= 0, \end{aligned}$$

то $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ делится на $(x - x_0)^2$.

Реш **1**. Пусть $f(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. По условию $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Следовательно, x_0 — двукратный корень многочлена $f(x)$, т.е. многочлен $f(x)$ делится на $(x - x_0)^2$.

З-ча **2**. Дано число 123456789101112131415…99100. Вычеркнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

Реш **2**. Ответ: 9999978596061…99100. При вычёркивании из данного числа 100 цифр мы всегда будем получать числа с одним и тем же числом знаков, поэтому нужно, чтобы первые цифры были наибольшими возможными. Сначала вычеркнем 84 цифры (последняя из них — цифра 4 в числе 49) так, чтобы получить число 999995051...5758596061...99100. Мы можем вычеркнуть ещё 16 цифр. Чтобы следующей за 99999 цифрой была цифра 9, нужно вычеркнуть 19 цифр; мы этого сделать не можем. Оставить цифру 8 мы тоже не можем: для этого нужно вычеркнуть 17 цифр. Но мы можем оставить цифру 7, вычёркивая 15 цифр 505152535455565. После этого мы имеем право вычеркнуть лишь одну цифру; это должна быть цифра 5 числа 58.

З-ча **3**. Дано 100 чисел a_1, a_2, a_3, ... , a_{100}, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{array}{rcl} a_1 - 3a_2 + 2a_3 & \geqslant & 0, \\ a_2 - 3a_3 + 2a_4 & \geqslant & 0, \\ a_3 - 3a_4 + 2a_5 & \geqslant & 0, \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 & \geqslant & 0, \\ a_{100} - 3a_1 + 2a_2 & \geqslant & 0. \end{array}$$

Доказать, что все числа a_i равны между собой.

Реш **3**. Сложим все эти неравенства. Коэффициент при a_k окажется равным $1 - 3 + 2 = 0$. Таким образом, у нас есть набор неотрицательных чисел $a_1 - 3a_2 + 2a_3$, ... , сумма которых равна 0. Значит, каждое из чисел равно 0, т.е. у нас есть система не неравенств, а уравнений. Эти уравнения удобно переписать в виде

$$\begin{array}{rcl} (a_1 - a_2) + 2(a_3 - a_2) & \geqslant & 0, \\ (a_2 - a_3) + 2(a_4 - a_3) & \geqslant & 0, \\ \dots & & \dots \\ (a_{100} - a_1) + 2(a_2 - a_1) & \geqslant & 0. \end{array}$$

Из этих уравнений последовательно получаем $a_2 - a_3 = (a_1 - a_2)/2$, $a_3 - a_4 = (a_2 - a_3)/2 = (a_1 - a_2)/2^2$, ... , $a_1 - a_2 = (a_{100} - a_1)/2 = (a_1 - a_2)/2^{100}$. Последнее равенство возможно лишь при $a_1 = a_2$. Но тогда $a_2 = a_3$, $a_3 = a_4$, ... , $a_{100} = a_1$.

З-ча **4**. Дан треугольник ABC. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых AS, BS, CS соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника, где S — произвольная внутренняя точка треугольника ABC. Доказать, что, по крайней мере, в одном из полученных четырёхугольников AB_1SC_1, C_1SA_1B, A_1SB_1C углы при вершинах C_1, B_1, или C_1, A_1, или A_1, B_1 — одновременно оба неострые.

Реш **4**. Предположим, что в каждом из полученных четырёхугольников AB_1SC_1, C_1SA_1B, A_1SB_1C по крайней мере один из углов при каждой паре вершин C_1 и B_1, C_1 и A_1, A_1 и B_1 острый. Пусть, например, в четырёхугольнике AB_1SC_1 угол при вершине C_1 острый. Тогда в четырёхугольнике C_1SA_1B угол при вершине C_1 тупой, поэтому угол при вершине A_1 должен быть острым. Тогда в четырёхугольнике A_1SB_1C угол при вершине A_1 тупой, поэтому угол при вершине B_1 должен быть острым.

Пусть A_2, B_2, C_2 — основания высот опущенных из вершин A, B, C на стороны треугольника. Тогда точка C_1 должна лежать на отрезке BC_2, точка A_1 — на отрезке CA_2, точка B_1 — на отрезке AB_2. Но в таком случае отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 не могут пересекаться в одной точке, поскольку отрезки AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке (точке пересечения высот). Приходим к противоречию.

З-ча **5**. Существуют ли в пространстве четыре точки A, B, C, D такие, что $AB = CD = 8$ см, $AC = BD = 10$ см, $AD = BC = 13$ см?

Реш **5**. Ответ: нет, не существуют. Неравенство $8^2 + 10^2 < 13^2$ показывает, что треугольник ABC тупоугольный. Покажем, что если все грани тетраэдра $ABCD$ равны, то треугольник ABC должен быть остроугольным. Любому тетраэдру можно сопоставить параллелепипед, проведя через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Если исходный тетраэдр равногранный, то грани полученного параллелепипеда являются параллелограммами с равными диагоналями, т.е. прямоугольниками. Таким образом, равногранному тетраэдру соответствует прямоугольный параллелепипед. Если длины рёбер этого параллелепипеда равны a, b, c, то квадраты длин рёбер исходного тетраэдра равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $c^2 + a^2$. Неравенства $(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) > c^2 + a^2$ и т.п. показывают, что грани исходного тетраэдра являются остроугольными треугольниками.

10 класс

З-ча **1**. Найти все действительные решения уравнения

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

Реш **1**. О т в е т : $x=\pm1,\ \ y=-\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Если мы рассмотрим данное уравнение как квадратное уравнение относительно x, то его дискриминант будет равен $4\big(\sin^2(xy)-1\big)$. Дискриминант должен быть неотрицательным, поэтому $\sin^2(xy)\geqslant 1$, т.е. $\sin(xy)=\pm1$. Решения уравнения $x^2\pm 2x+1=0$ имеют вид $x=\mp1$. Далее, если $\sin(\mp y)=\pm1$, то $\sin y=-1$.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Дано 100 чисел $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{100}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{array}{rcl}
a_1-4a_2+3a_3 & \geqslant & 0,\\
a_2-4a_3+3a_4 & \geqslant & 0,\\
a_3-4a_4+3a_5 & \geqslant & 0,\\
\dots & & \dots\\
\dots & & \dots\\
a_{99}-4a_{100}+3a_1 & \geqslant & 0,\\
a_{100}-4a_1+3a_2 & \geqslant & 0.
\end{array}$$

Известно, что $a_1=1$, определить $a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{100}$.

Реш **3**. О т в е т : $a_1=a_2=\dots=a_{100}=1$. См. решение задачи 3 для 9 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Дан лист клетчатой бумаги. Каждый узел сетки обозначается некоторой буквой. Каким наименьшим числом различных букв нужно обозначить эти узлы, чтобы на отрезке, соединяющем два узла, обозначенных одинаковыми буквами, находился, по крайней мере, один узел, обозначенный одной из других букв?

Реш **1**. О т в е т : двумя буквами. Эти буквы нужно расставить в шахматном порядке.

З-ча **2**. Город устроен по плану, изображенному на рис.???. Из точек A и B одновременно выезжают в одном направлении две машины, которые двигаются с одинаковой скоростью. Доехав до перекрёстка, каждая машина или продолжает движение в том же направлении, или поворачивает на 120° вправо или влево от направления движения (см. рис. ???).

Могут ли машины встретиться?

Реш **2**. О т в е т : нет, не могут. Машины проезжают перекрёстки в разные моменты времени, поэтому они могли бы встретиться только на некоторой улице, двигаясь навстречу друг другу. Но на каждой улице направление движения этих машин определено однозначно (рис.???); двигаться по одной улице в разных направлениях они не могут.

З-ча **3**. Решить систему:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
10x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0,\\
 & & 11x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & + & x_6 & & & = & 0,\\
 & & & + & 15x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & + & 4x_6 & + & x_7 & = & 0,\\
2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 12x_4 & - & 3x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 0,\\
6x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & 17x_5 & + & x_6 & & & = & 0,\\
3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & - & 16x_6 & + & 2x_7 & = & 0,\\
4x_1 & - & 8x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 3x_5 & & & + & 19x_7 & = & 0.
\end{array}$$

Реш **3**. О т в е т : $x_1=x_2=\dots=x_7=0$.

Запишем уравнения рассматриваемой системы в виде $\sum_{i=1}^{7}a_{ij}x_i=0$. Коэффициенты a_{ij} обладают следующим свойством: $|a_{jj}|>\sum_{i\neq j}|a_{ij}|$ для каждого j. Пусть $x_1,\ \dots,\ x_7$ — решение рассматриваемой системы. Предположим, что хотя бы одно из чисел $x_1,\ \dots,\ x_7$ отлично от нуля. Пусть x_k — наибольшее по абсолютной величине из этих чисел. Тогда $|a_{kk}x_k|>|\sum_{i\neq k}a_{ik}x_i|$, поэтому равенство $\sum_{i=1}^{7}a_{ik}x_i=0$ не может выполняться. Приходим к противоречию.

8 класс

З-ча **1**. Из клетчатой бумаги вырезан квадрат 17×17. В клетках квадрата произвольным образом написаны числа $1, 2, 3, \dots, 70$ по одному и только одному числу в каждой клетке.

Доказать, что существуют четыре различные клетки с центрами в точках A, B, C, D такие, что $AB = CD$, $AD = BC$ и сумма чисел, стоящих в клетках с центрами в A и C, равна сумме чисел в клетках с центрами B и D.

Реш **1**. Рассмотрим всевозможные пары клеток, симметричных относительно центра квадрата. Количество таких пар равно $(17^2 - 1)/2 = 144$. Сумма чисел, написанных в двух клетках может быть равна 2, 3, … , 140. Поэтому найдутся две пары клеток, симметричных относительно центра квадрата, с равными суммами написанных чисел. В качестве точек A и C возьмём центры одной пары клеток, а в качестве точек B и D — центры другой пары.

З-ча **2**. Даны четыре прямые m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающиеся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную m_4, до пересечения с прямой m_2 в точке A_2, через точку A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3, через A_3 проводим прямую, параллельную m_2, до пересечения с прямой m_4 в точке A_4, и через точку A_4 проводим прямую, параллельную m_3, до пересечения с m_1 в точке B.

Доказать, что $OB < \frac{OA_1}{2}$ (см. рис. ???).

Реш **2**. См. решение задачи 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Дано число

$$H = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$$

(произведение простых чисел). Пусть 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, … , H - все его делители, выписанные в порядке возрастания. Под рядом делителей выпишем ряд из $+1$ и -1 по следующему правилу: под единицей $+1$, под числом, которое разлагается на чётное число простых сомножителей, $+1$, и под числом, которое разлагается на нечётное число простых сомножителей, -1.

Доказать, что сумма чисел полученного ряда равна 0.

Реш **3**. Будем называть «чётным» делитель, который разлагается на чётное число простых сомножителей (1 относится к «чётным» делителям), а «нечётным» — делитель, который разлагается на нечётное число простых сомножителей. Докажем индукцией по k, что число $N_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot p_k$ (произведение первых k простых чисел) имеет 2^{k-1} «чётных» делителей и 2^{k-1} «нечётных» делителей. (Тогда для числа N_k рассматриваемая сумма равна $2^{k-1} - 2^{k-1} = 0$.)

Для числа $N_1 = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для N_k. Число N_{k+1} имеет 2^{k-1} «чётных» делителей и 2^{k-1} «нечётных» делителей, не делящихся на p_{k+1} (все эти делители являются делителями числа N_k). Помимо этих делителей оно имеет делители, делящиеся на на p_{k+1}. А именно, 2^{k-1} «чётных» делителей, соответствующих «нечётным» делителям числа N_k, и 2^{k-1} «нечётных» делителей, соответствующих «чётным» делителям числа N_k. В итоге получаем $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ «чётных» делителей и 2^k «нечётных» делителей.

З-ча **4**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **5**. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

Реш **5**. Ответ: 0, 1 или 7.

Ось симметрии семиугольника обязательно проходит через одну из его вершин (остальные вершины разбиваются на пары симметричных вершин). Пусть у семиугольника есть ось симметрии. Тогда у него есть три пары равных углов и три пары равных сторон. Вторая ось симметрии может быть расположена тремя существенно различными (не симметричными) способами. Легко видеть, что в каждом из этих трёх случаев все стороны семиугольника оказываются равными и все углы тоже.

9 класс

З-ча **1**. На двух лучах l_1 и l_2, исходящих из точки O, отложены отрезки OA_1 и OB_1 на луче l_1 и OA_2 и OB_2 на луче l_2; при этом $\frac{OA_1}{OA_2} \neq \frac{OB_1}{OB_2}$.

Определить геометрическое место точек S пересечения прямых A_1A_2 и B_1B_2 при вращении луча l_2 около точки O (луч l_1 неподвижен).

Реш **1**. Применив теорему Менелая к треугольнику SA_2B_2 и прямой l_1, получим

$$\frac{SA_1}{A_2A_1} \cdot \frac{A_2O}{B_2O} \cdot \frac{B_2B_1}{SB_1} = 1.$$

При вращении луча l_2 отношения $A_2O : B_2O$ и $B_2B_1 : A_2A_1$ остаются постоянными, поэтому отношение $SA_1 : SB_1$ тоже остаётся постоянным. Точки A_1 и B_1 при этом фиксированы. Геометрическое место точек S, для которых отношение $SA_1 : SB_1$ постоянно, — это окружность (*окружность Аполлония*).

З-ча **2**. Даны четыре прямые m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающиеся в одной точке O. Через произвольную точку A_1 прямой m_1 проводим прямую, параллельную прямой m_4, до пересечения с прямой m_2 в точке A_2, через A_2 проводим прямую, параллельную m_1, до пересечения с m_3 в точке A_3, через A_3 проводим прямую, параллельную m_2, до пересечения с m_4 в точке A_4 и через точку A_4 проводим прямую, параллельную m_3, до пересечения с m_1 в точке B.

Доказать, что $OB \leqslant \frac{OA_1}{4}$ (см. рис. ???).

Реш **2**. Пусть $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OA_2}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OA_3}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OA_4}$. Выразим эти векторы через $e_1 = \vec{a}$ и $e_2 = \vec{d}$. В результате получим

$$\begin{aligned}\vec{b} &= e_1 + \lambda_1 e_2,\\ \vec{c} &= \vec{b} - \lambda_2 e_1 = (1-\lambda_2)e_1 + \lambda_1 e_2,\\ e_2 &= \vec{c} - \lambda_3\vec{b} = (1-\lambda_2-\lambda_3)e_1 + (\lambda_1 - \lambda_1\lambda_3)e_2.\end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекают соотношения $1-\lambda_2 = \lambda_3$ и $\lambda_1 - \lambda_1\lambda_3 = 1$. Наконец, пусть $-\mu e_1 = \overrightarrow{OB}$. Тогда $-\mu e_1 = e_2 - \lambda_4\vec{c} = -\lambda_4(1-\lambda_1) - \lambda_4\lambda_1 e_2$, поэтому $\mu = \lambda_4(1-\lambda_1)$ и $\lambda_4\lambda_1 = 1$. Учитывая все эти соотношения, получаем $\mu = \frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \lambda_3(1-\lambda_3) \leqslant \frac{1}{4}$.

З-ча **3**. Сто положительных чисел C_1, C_2, ... , C_{100} удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}C_1^2 + C_2^2 + \ldots C_{100}^2 &> 10000,\\ C_1 + C_2 + \ldots C_{100} &< 300.\end{aligned}$$

Доказать, что среди них можно найти три числа, сумма которых больше 100.

Реш **3**. Можно считать, что $C_1 \geqslant C_2 \geqslant \ldots \geqslant C_{100} > 0$. Если $C_1 \geqslant 100$, то $C_1 + C_2 + C_3 > 100$. Поэтому будем считать, что $C_1 < 100$. Тогда $100 - C_1 > 0$, $100 - C_2 > 0$, $C_1 - C_2 \geqslant 0$ и $C_1 - C_3 \geqslant 0$, поэтому

$$\begin{aligned}100(C_1+C_2+C_3) &\geqslant 100(C_1+C_2+C_3) - (100-C_1)(C_1-C_3) - (100-C_2)(C_2-C_3) =\\ &= C_1^2 + C_2^2 + C_3(300 - C_1 - C_2) >\\ &> C_1^2 + C_2^2 + C_3(C_3 + C_4 + \cdots + C_{100}) \geqslant\\ &\geqslant C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{100}^2 > 10000.\end{aligned}$$

Следовательно, $C_1 + C_2 + C_3 > 100$.

З-ча **4**. Если дан ряд из 15 чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_{15}, \tag{1}$$

то можно написать второй ряд

$$b_1, b_2, \ldots, b_{15}, \tag{2}$$

где $b_i (i = 1, 2, 3, \ldots, 15)$ равно числу чисел ряда (1), меньших a_i. Существует ли ряд чисел a_i, если дан ряд чисел b_i:

$$1, 0, 3, 6, 9, 4, 7, 2, 5, 8, 8, 5, 10, 13, 13?$$

Реш **4**. О т в е т : нет, не существует.

Предположим, что требуемый ряд чисел a_i существует. При перестановке чисел a_i числа b_i переставляются точно так же. Кроме того, если числа a_i расположены в порядке возрастания, то числа b_i тоже расположены в порядке возрастания. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{15}$ — это числа $a_1, \ldots, a_{15}$, расположенные в порядке возрастания, а $\beta_1, \ldots, \beta_{15}$ — числа $b_1, \ldots, b_{15}$, расположенные в порядке возрастания, т.е. $\beta_1, \ldots, \beta_{15}$ — это последовательность

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9, 10, 13, 13.$$

Из того, что $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$, $\beta_4 = 3$, $\beta_5 = 4$, $\beta_6 = 5$ и $\beta_7 = 5$, следует, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5 < \alpha_6 = \alpha_7$. В таком случае если $\alpha_7 = \alpha_8$, то $\beta_8 = 5$, а если $\alpha_7 < \alpha_8$, то $\beta_8 = 7$. А у нас $\beta_8 = 6$. Приходим к противоречию.

З-ча **5**. Дан отрезок OA. Из конца отрезка A выходит 5 отрезков AB_1, AB_2, AB_3, AB_4, AB_5. Из каждой точки B_i могут выходить ещё пять новых отрезков, или ни одного нового отрезка и т.д.

Может ли число свободных концов построенных отрезков равняться 1001?

Под свободным концом отрезка понимаем точку, принадлежащую только одному отрезку (кроме точки O).

Реш **5**. Ответ: да, может. При проведении пяти отрезков из конца отрезка появляются 5 новых свободных концов и пропадает один старый. В результате число свободных концов увеличивается на 4. Поэтому если пятёрки отрезков проведены k раз, то число свободных концов равно $4k+1$. При $k=250$ получаем нужное число свободных концов.

10 класс

З-ча **1**. Сколько плоскостей симметрии может иметь треугольная пирамида?

Реш **1**. Ответ: 0, 1, 2, 3 или 6.

Плоскость симметрии треугольной пирамиды $ABCD$ обязательно содержит две её вершины. Действительно, если бы были две пары вершин, симметричных относительно одной плоскости, то все четыре вершины пирамиды лежали бы в одной плоскости. Поэтому плоскость симметрии однозначно задаётся парой вершин A и B, лежащих в ней. При этом $AC=BC$ и $AD=BD$.

Предположим, что есть две плоскости симметрии. Задающие их пары вершин могут либо иметь общую вершину (рис.???а), либо не иметь (рис.???б). В первом случае мы получаем правильную пирамиду, которая имеет либо 3 плоскость симметрии, либо 6 (когда длина бокового ребра равны длине ребра основания, т.е. в случае правильного тетраэдра). Во втором случае пирамида имеет либо 2 плоскости симметрии, либо 6 (если $c=d\neq a$, то новых плоскостей симметрии не возникает).

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. Известно, что модули всех корней уравнений

$$\begin{aligned} x^2+Ax+B &= 0, \\ x^2+Cx+D &= 0 \end{aligned}$$

меньше единицы.

Доказать, что модули корней уравнения $x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}=0$ также меньше единицы. A, B, C, D — действительные числа.

Реш **4**. Пусть $|x|>1$. Тогда $x^2+Ax+B>0$ и $x^2+Cx+D>0$. Поэтому $x^2+\frac{A+C}{2}x+\frac{B+D}{2}>0$.

З-ча **5**. Рассматриваются всевозможные десятизначные числа, записываемые при помощи 2 и 1. Разбить их на два класса так, чтобы при сложении любых двух чисел каждого класса получилось число, в написании которого содержится не менее двух троек.

Реш **5**. Отнесём к первому классу все числа, в записи которых встречается чётное число двоек, а ко второму классу — все числа, в записи которых встречается нечётное число двоек. Два числа одного класса либо содержат одинаковое число двоек, либо в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом. Если два числа различны, то на каком-то месте в одном числе стоит 1, а в другом числе стоит 2; если же двоек у этих чисел одинаковое количество, то таких мест по крайней мере два. Если в одном числе двоек по крайней мере на две больше, чем в другом, то по крайней мере двум двойкам в записи первого числа соответствуют единицы в записи второго числа.

XVIII олимпиада (1955)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Числа $1, 2, \dots, 49$ расположены в квадратную таблицу

$$\begin{array}{rrrrrrr} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \\ 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 43, & 44, & 45, & 46, & 47, & 48, & 49. \end{array}$$

Произвольное число из таблицы выписывается, после чего из таблицы вычёркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей и т.д., всего 7 раз. Найти сумму выписанных чисел.

Реш **1**. О т в е т : 175. См. решение задачи 1 для 8 класса.

З-ча **2**. Дан прямоугольный треугольник ABC. Из вершины B прямого угла проведена медиана BD. Пусть K — точка касания стороны $AD\Delta ABD$ с окружностью, вписанной в этот треугольник.

Найти углы ΔABC, если K делит AD пополам.

Реш **2**. О т в е т : $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle BCA = 30^\circ$.

Точка K делит AD пополам, поэтому $AB = BD$. Точка B лежит на окружности с диаметром AC, поэтому $BD = DC = DA$. Таким образом, $AC = 2AB$. Поэтому $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle BCA = 30^\circ$.

З-ча **3**. Дан равносторонний ΔABC. На сторонах AB и BC взяты точки D и E так, что $AE = CD$. Найти геометрическое место точек пересечения отрезков AE и CD.

Реш **3**. О т в е т : высота, проведённая из вершины B, и дуга окружности, из которой сторона AC видна под углом 120°.

Фиксируем точку D. На стороне BC есть две точки E_1 и E_2, для которых $AE_1 = AE_2 = CD$. А именно, точки, для которых $BE_1 = AD$ и $CE_2 = AD$. Отрезки AE_2 и CD пересекаются на высоте BH треугольника ABC. Отрезок CD получается из отрезка AE_1 поворотом на 60° вокруг центра треугольника ABC. Поэтому из точки пересечения отрезков CD и AE_1 сторона AC видна под углом 120°.

З-ча **4**. Существует ли такое n, что $n^2 + n + 1$ делится на 1955?

Реш **4**. О т в е т : нет, не существует. Число $n^2 + n$ при делении на 5 даёт в остатке либо 0, либо 1, либо 2. Поэтому $n^2 + n + 1$ не делится на 5, а значит, $n^2 + n + 1$ не делится на 1955.

З-ча **5**. Найти все прямоугольники, которые можно разрезать на 13 равных квадратов.

Реш **5**. О т в е т : прямоугольники с отношением сторон $13 : 1$.

Квадраты, на которые разрезан прямоугольник, по условию равны. Поэтому каждая сторона прямоугольника разбита на равные части: одна сторона на m частей, а другая на n. Общее число квадратов равно mn, поэтому $mn = 13$. Но число 13 простое, поэтому одно из чисел m и n равно 1, а другое равно 13.

8 класс

З-ча **1**. $2^n = 10a + b$. Доказать, что если $n > 3$, то ab делится на 6. n, a и b — целые числа, $b < 10$.

Реш **1**. Поскольку $2^4 = 16$, число 2^{4k} оканчивается на 6. Соответственно, числа 2^{4k+1}, 2^{4k+2}, 2^{4k+3} оканчиваются на 2, 4, 8. Для чисел вида 2^{4k} требуемое утверждение очевидно, поскольку $b = 6$. Заметим также, что число b всегда чётно. Поэтому достаточно проверить, что числа $2^{4k+1} - 2$, $2^{4k+2} - 4$, $2^{4k+3} - 8$ делятся на 3, иными словами достаточно проверить, что $2^{4k} - 1$ делится на 3. Число $2^4 = 16$ при делении на 3 даёт остаток 1, поэтому число 2^{4k} тоже даёт остаток 1 при делении на 3.

З-ча **2**. Дан четырехугольник $ABCD$. На стороне AB взята точка K, на стороне BC — точка L, на стороне CD — точка M и на стороне AD — точка N, так, что $KB = BL = a$, $MD = DN = b$. Пусть $KL \nparallel MN$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых KL и MN при изменении a и b.

Реш **2**. О т в е т : внутренность параллелограмма (см. рис.???).

З-ча **3**. Квадратная таблица из 49 клеток заполнена числами от 1 до 7 так, что в каждом столбце и в каждой строке встречаются все эти числа. Если таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встречаются все эти числа.

Реш **3**. См. решение задачи 1 для 10 класса при $n = 7$.

З-ча **4**. Какие выпуклые фигуры могут содержать прямую?

Реш **4**. О т в е т : плоскость, полуплоскость и полоса, заключённая между двумя параллельными прямыми.

З-ча **5**. На окружности даны четыре точки A, B, C, D. Через каждую пару соседних точек проведена окружность. Вторые точки пересечения соседних окружностей обозначим через A_1, B_1, C_1, D_1. (Некоторые из них могут совпадать с прежними.) Доказать, что A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.

Реш **5**. Воспользуемся свойствами ориентированных углов между прямыми:

$$\begin{aligned}\angle(B_1A_1, A_1D_1) &= \angle(B_1A_1, A_1A) + \angle(AA_1, A_1D_1) = \\ &= \angle(B_1B, BA) + \angle(AD, DD_1), \\ \angle(B_1C_1, C_1D_1) &= \angle(B_1C_1, C_1C) + \angle(CC_1, C_1D_1) = \\ &= \angle(B_1B, BC) + \angle(CD, DD_1).\end{aligned}$$

Поэтому равенство $\angle(B_1A_1, A_1D_1) = \angle(B_1C_1, C_1D_1)$ эквивалентно равенству $\angle(B_1B, BA) + \angle(AD, DD_1) = \angle(B_1B, BC) + \angle(CD, DD_1)$. Последнее равенство следует из того, что $\angle(AB, BC) = \angle(AD, DC)$, $\angle(AB, BC) = \angle(AB, BB_1) + \angle(BB_1, BC)$ и $\angle(AD, DC) = \angle(AD, DD_1) + \angle(DD_1, DC)$.

9 класс

З-ча **1**. Числа $1, 2, \ldots, k^2$ расположены в квадратную таблицу

$$\begin{matrix} 1, & 2, & \ldots, & k, \\ k+1, & k+2, & \ldots, & 2k, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)k+1, & \ldots, & \ldots, & k^2. \end{matrix}$$

Произвольное число выписывается, после чего из таблицы вычеркивается строка и столбец, содержащие это число. То же самое проделывается с оставшейся таблицей из $(k-1)^2$ чисел и т.д. k раз. Найти сумму выписанных чисел.

Реш **1**. О т в е т : $\frac{k(k^2+1)}{2}$.

Запишем данную таблицу в виде

$$\begin{matrix} k\cdot 0+1, & k\cdot 0+2, & \ldots, & k\cdot 0+k, \\ k\cdot 1+1, & k\cdot 1+2, & \ldots, & k\cdot 1+k, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (k-1)k+1, & (k-1)k+2 & \ldots, & (k-1)k+k. \end{matrix}$$

Каждое число таблицы представлено в виде $ka + b$, где $0 \leqslant a \leqslant k-1$ и $1 \leqslant b \leqslant k$. Будем отдельно суммировать слагаемые ka и слагаемые b. Из каждой строки выписано в точности одно число, поэтому будут присутствовать слагаемые ka для каждого $a = 0, 1, \ldots, k-1$. Из каждого столбца выписано в точности одно число, поэтому будут присутствовать слагаемые b для каждого $b = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, искомая сумма равна

$$k\bigl(0+1+2+\cdots+(k-1)\bigr) + (1+2+\cdots+k) = k\cdot\frac{k(k-1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k^2+1)}{2}.$$

З-ча **2**. Найти геометрическое место середин отрезков с концами на двух различных непересекающихся окружностях, лежащих одна вне другой.

Реш **2**. Пусть S_1 и S_2 — данные окружности, O_1 и O_2 — их центры. Рассмотрим окружность S_2', которая получается из окружности S_2 переносом на вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$; центр этой окружности совпадает с центром окружности S_1. Пусть A_1 — точка окружности S_1, A_2 и A_2' — точки окружностей S_2 и S_2', соответствующие друг другу. Если M — середина отрезка A_1A_2, а M' — середина отркзка A_1A_2', то $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$. Поэтому можно рассмотреть случай, когда даны две концентрические окружности: полученное ГМТ нужно просто сдвинуть на вектор $\frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2}$.

Пусть O — общий центр двух окружностей радиусов R и r, причём $R \geqslant r$. Фиксируем на окружности радиуса r точку A и рассмотрим середины всех отрезков AB, где точка B перемещается по окружности радиуса R. Они образуют окружность, причём её сама близкая к O точка находится на расстоянии $\frac{R-r}{2}$, а самая далёкая — на расстоянии $\frac{R+r}{2}$. Если точка A будет двигаться по всей окружности, то мы получим кольцо с внутренним радиусом $\frac{R-r}{2}$ и внешним радиусом $\frac{R+r}{2}$ (если $R = r$, то получается не кольцо, а круг).

З-ча **3**. Найти все действительные решения системы:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Реш **3**. Если $x = 0$ или ± 1, то $y = \pm 1$ или 0. Ясно также, что $x \neq -1$ и $y \neq -1$. Поэтому решений такого вида ровно два: $x = 0$, $y = 1$ и $x = 1$, $y = 0$. Покажем, что других решений нет.

Нас интересует случай, когда $0 < |x|, |y| < 1$. В таком случае $|x|^3 + |y|^3 < x^4 + y^4 = 1$. Поэтому если числа x и y оба положительны, то решений нет. Если оба эти числа отрицательны, то решений тоже нет. Пусть теперь, например, $x > 0$ и $y < 0$. Тогда $x^3 + y^3 < x^3 < 1$. В этом случае решений тоже нет.

З-ча **4**. p простых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_p$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию и $a_1 > p$. Доказать, что если p — простое число, то разность прогрессии делится на p.

Реш **4**. Рассмотрим остатки от деления чисел $a_1, \ldots, a_p$ на p. Эти числа простые и все они строго больше p, поэтому ни одно из них не делится на p. Таким образом, мы получили p различных остатков, отличных от p. Следовательно, если два числа a_i и a_j, дающие одинаковые остатки при делении на p. Поэтому их разность делится на p. Но $a_i - a_j = (i-j)d$, где d — разность прогрессии. Число $|i-j|$ строго меньше p, поэтому на p должно делиться число d.

З-ча **5**. Дан ΔABC и точка D внутри него, причем $AC - DA > 1$ и $BC - BD > 1$. Берётся произвольная точка E внутри отрезка AB. Доказать, что $EC - ED > 1$.

Реш **5**. Отрезок CE пересекает отрезок AD или отрезок BD; пусть для определённости он пересекает отрезок AD в точке P. Тогда $AP + PC > AC$ и $EP + PD > ED$, поэтому $DA + EC > AC + ED$. Следовательно, $EC - ED > AC - DA > 1$.

10 класс

З-ча **1**. Квадратная таблица в n^2 клеток заполнена числами от 1 до n так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти числа. Если n нечетное и таблица симметрична относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, то на этой диагонали встретятся все эти числа $1, 2, 3, \ldots, n$. Доказать.

Реш **1**. Таблица симметрична относительно диагонали, поэтому каждому числу, расположенному вне диагонали, соответствует равное ему число на симметричном месте. Значит, вне диагонали расположено чётное число единиц, чётное число двоек и т.д. По условию в каждой строке встречаются все числа от 1 до n. Поэтому в каждой строке любое число от 1 до n встречается ровно один раз, а всего в таблице оно встречается ровно n раз. Число n нечётно, поэтому каждое число от 1 до n встречается на диагонали нечётное число раз; в частности, каждое число от 1 до n встречается на диагонали по крайней мере один раз. Но на диагонали всего n мест, поэтому каждое число от 1 до n встречается на диагонали ровно один раз.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **3**. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под острым углом. В направлении одной из прямых производится сжатие с коэффициентом 1/2. Доказать, что найдется точка, расстояние от которой до точки пересечения прямых увеличится.

Реш **3**. Пусть e_1 и e_2 — векторы единичной длины на данных прямых l_1 и l_2. Сжатие с коэффициентом 1/2 в направлении прямой l_1 переводит вектор $\lambda e_1 + \mu e_2$ в вектор $\lambda e_1 + \frac{\mu}{2} e_2$. Пусть φ — угол между векторами e_1 и e_2. Длина первого вектора равна $\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\varphi$, а длина второго вектора равна $\lambda^2 + \frac{\mu^2}{4} + \lambda\mu\cos\varphi$. Нужно выбрать числа λ и μ так, что $\lambda^2 + \frac{\mu^2}{4} + \lambda\mu\cos\varphi > \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\varphi$, т.е. $\frac{3}{4}\mu^2 < -\lambda\mu\cos\varphi$. При $\mu = 1$ это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{3}{4} < -\lambda\cos\varphi$.

З-ча **4**. См. задачу 5 для 9 класса.

З-ча **5**. Дан трехгранный угол с вершиной O. Можно ли найти такое плоское сечение ABC, чтобы углы OAB, OBA, OBC, OCB, OAC, OCA были острыми?

Реш **5**. Ответ: да, можно. Выберем точки A, B, C на одном расстоянии от точки O. Тогда все указанные углы будут углами при основаниях равнобедренных треугольников, а угол при основании равнобедренного треугольника обязательно острый.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Решить в целых числах уравнение

$$x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0.$$

Реш **1**. Ответ: $x = y = z = 0$.

Пусть $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$, где x, y, z — целые числа. Тогда число x чётно. После замены $x = 2x_1$ получаем уравнение $8x_1^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$. Сократим на 2: $4x_1^3 - y^3 - 2z^3 = 0$. Значит, число y чётно. После замены $y = 2y_1$ получаем уравнение $4x_1^3 - 8y_1^3 - 2z^3 = 0$. Снова сократим на 2: $2x_1^3 - 4y_1^3 - z^3 = 0$. Значит, число z чётно. После замены $z = 2z_1$ получаем уравнение $x_1^3 - 2y_1^3 - 4z_1^3 = 0$, которое имеет такой же вид, как и исходное уравнение. Поэтому снова можно доказать, что числа x_1, y_1, z_1 чётны и т.д. Но это возможно лишь в том случае, когда $x = y = z = 0$.

З-ча **2**. Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точной четвёртой степенью. Доказать, что тогда $a = b = 0$.

Реш **2**. Ясно, что $a \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Рассмотрим значения x, равные $1, 2, \ldots, n$. Если одно из чисел a и b отлично от нуля, то трёхчлен ax^2+bx+c при таких x принимает по крайней мере $n/2$ различных значений. Эти значения заключены между 0 и $an^2 + |b|n + c$. Количество различных точных четвёртых степеней, заключённых между 0 и $an^2 + |b|n + c$, не превосходит $\sqrt[4]{an^2 + |b|n + c} + 1$. Поэтому $\sqrt[4]{an^2 + |b|n + c} + 1 \geqslant n/2$, т.е. $an^2 + |b|n + c \geqslant \left(\frac{n}{2} - 1\right)^4$. При очень больших n такое неравенство выполняться не может, поскольку $(n/2)^4$ будет гораздо больше, чем an^2.

З-ча **3**. Дан ΔABC. Центры вневписанных окружностей O_1, O_2 и O_3 соединены прямыми. Доказать, что $\Delta O_1O_2O_3$ — остроугольный.

Реш **3**. Центр O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC, является точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C. Поэтому $\angle O_1CB = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$ и $\angle O_1BC = \frac{180^\circ - \angle B}{2}$. Следовательно, $\angle BO_1C = \frac{180^\circ - \angle A}{2} < 90^\circ$.

З-ча **4**. В турнире собираются принять участие 25 шахматистов. Все они играют в разную силу, и при встрече всегда побеждает сильнейший. Какое наименьшее число партий требуется, чтобы определить двух сильнейших игроков?

Реш **4**.

З-ча **5**. Разрезать прямоугольник на 18 прямоугольников так, чтобы никакие два соседних прямоугольника не образовывали прямоугольника.

Реш **5**. См. рис.???

8 класс

З-ча **1**. Трёхчлен $ax^2 + bx + c$ при всех целых x является точным квадратом. Доказать, что тогда $ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$.

Реш **1**. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$f(x+1) - f(x) = \frac{\left(f(x+1)\right)^2 - \left(f(x)\right)^2}{f(x+1) + f(x)} = \frac{a(2x+1) + b}{f(x+1) + f(x)},$$

поэтому $\lim_{x\to\infty}\left(f(x+1) - f(x)\right) = \sqrt{a}$. При целом x число $f(x+1) - f(x)$ является целым, поэтому $\sqrt{a} = d$, где d — целое число. Кроме того, при целых $x \geqslant x_0$ разность $f(x+1) - f(x)$ должна быть равна своему предельному значению d. Положим $y = x_0 + n$. Тогда $f(y) = f(x_0) + nd$ при всех натуральных n. Таким образом,

$$ay^2 + by + c = \left(f(x_0) + nd\right)^2 = \left(dy - dx_0 + f(x_0)\right)^2$$

для всех $y = x_0 + n$, n — натуральное. Но тогда такое равенство имеет место для всех y. Итак, $d = \sqrt{a}$ и $e = f(x_0) - dx_0$, где x_0 — любое целое число.

З-ча **2**. Две окружности касаются друг друга внешним образом и третьей изнутри. Проводятся внешняя и внутренняя общие касательные к первым двум окружностям. Доказать, что внутренняя касательная делит пополам дугу, отсекаемую внешней касательной на третьей окружности.

Реш **2**. Пусть O_1 и O_2 — центры первых двух окружностей, O — центр третьей окружности, A и B — точки пересечения третьей окружности с внешней касательной, P — середина дуги AB (точки P и O_1 лежат по разные стороны от прямой AB). Проведём из точки P касательную PQ к окружности с центром O_1. Докажем, что $PQ = PA$. Пусть M и N — точки касания окружности с центром O с прямой AB и с третьей окружностью. Треугольники NO_1M и NOP равнобедренные, причём $\angle NO_1M = \angle NOP$, поэтому прямая MN проходит через точку P. Следовательно, $PQ^2 = PM \cdot PN = PM \cdot (PM + MN) = PM^2 + AM \cdot MB$. Пусть K — середина отрезка AB. Тогда $PM^2 = PK^2 + KM^2$ и $AM \cdot MB = AK^2 - KM^2$, поэтому $PQ^2 = PK^2 + AK^2 = AP^2$. Таким образом, $PO_1^2 = PQ^2 + QO_1^2 = PA^2 + r_1^2$, где r_1 — радиус окружности с центром O_1. Аналогично доказывается, что $PO_2^2 = PQ^2 + QO_2^2 = PA^2 + r_2^2$, где r_2 — радиус окружности с центром O_2. Пусть R — точка касания первых двух окружностей (она лежит на отрезке O_1O_2). Тогда $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2 = RO_1^2 - RO_2^2$. Из этого следует, что $PR \perp O_1O_2$, а значит, PR — общая внешняя касательная к первым двум окружностям. (Тот факт, что множество точек X, для которых $XO_1^2 - XO_2^2 = \text{const}$, представляет собой прямую, перпендикулярную прямой O_1O_2, легко доказать методом координат.)

З-ча **3**. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1 \dots A_n$ и соединена отрезками с вершинами. Стороны n-угольника нумеруются числами от 1 до n, разные стороны нумеруются разными числами. То же самое делается с отрезками $OA_1, \dots, OA_n$.

а) При $n = 9$ найти нумерацию, при которой сумма номеров сторон для всех треугольников $A_1OA_2, \dots, A_nOA_1$ одинакова.

б) Доказать, что при $n = 10$ такой нумерации осуществить нельзя.

Реш **3**. а) См. рис.???

б) Сумма всех номеров сторон треугольников $A_1OA_2, \dots, A_nOA_1$ равна $3(1 + 2 + \dots + n) = \frac{3n(n+1)}{2}$. Если для каждого из n треугольников сумма номеров сторон одна и та же, то она равна $\frac{3(n+1)}{2}$. Но для $n = 10$ число $\frac{3(n+1)}{2}$ не целое.

З-ча **4**. Неравенство

$$Aa(Bb + Cc) + Bb(Cc + Aa) + Cc(Aa + Bb) > \frac{1}{2}(ABc^2 + BCa^2 + CAb^2),$$

где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ — данные числа, выполняется для всех $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$. Можно ли из отрезков a, b, c составить треугольник?

Реш **4**. О т в е т : да, можно. Положим $A = B = 1$, $C = \varepsilon$. Тогда

$$a(b + \varepsilon c) + b(\varepsilon c + a) + \varepsilon c(a + b) > \frac{1}{2}(c^2 + \varepsilon a^2 + \varepsilon b^2). \tag{1}$$

Поэтому должно выполняться неравенство $2ab \geqslant \frac{1}{2}c^2$, поскольку иначе неравенство (1) не выполнялось бы при малых ε. Значит, $c^2 \leqslant 4ab \leqslant (a + b)^2$. Числа a, b, c положительны, поэтому $c \leqslant a + b$. Неравенства $a \leqslant b + c$ и $b \leqslant a + c$ доказываются аналогично.

З-ча **5**. Числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны между собой, и числа $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{M}{a}\right]$ тоже различны между собой. Найти все такие a.

Реш **5**. О т в е т : $\frac{N-1}{N} \leqslant |a| \leqslant \frac{M}{M-1}$.

Числа $[x]$ и $[y]$ различны тогда и только тогда, когда числа $[-x]$ и $[-y]$ различны. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $a > 0$. Если $a < \frac{N-1}{N}$, то среди чисел $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ есть совпадающие, поскольку эти N чисел содержатся среди $N - 1$ чисел $0, 1, \dots, N - 2$. Поэтому $a \geqslant \frac{N-1}{N}$. Те же самые рассуждения для числа $1/a$ показывают, что $\frac{1}{a} \geqslant \frac{M-1}{M}$, т.е. $a \leqslant \frac{M}{M-1}$.

Покажем, что если $\frac{N-1}{N} \leqslant a \leqslant \frac{M}{M-1}$, то все числа $[a]$, $[2a]$, ..., $[Na]$ различны. Действительно, если $a \geqslant 1$, то вообще все числа $[a]$, $[2a]$, $[3a]$, ... различны, а если $a > 1$, то $1 - \frac{1}{N} \leqslant a < 1$, $2 - \frac{2}{N} \leqslant a < 2$, ..., $N - 1 \leqslant a < N$, поэтому $[ka] = k - 1$ для $k = 1, 2, \dots, N$. Для чисел $\left[\frac{1}{a}\right]$, $\left[\frac{2}{a}\right]$, ..., $\left[\frac{M}{a}\right]$ рассуждения аналогичны.

9 класс

З-ча **1**. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC, CA взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{n}.$$

На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки C_2, A_2, B_2 так, что

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = n.$$

Доказать, что $A_2C_2 \parallel AC$, $C_2B_2 \parallel CB$, $B_2A_2 \parallel BA$.

Реш **1**. Пусть $(n+1)\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $(n+1)\vec{b} = \overrightarrow{CA}$, $(n+1)\vec{c} = \overrightarrow{AB}$. Тогда

$$\overrightarrow{A_2C_2} = \frac{1}{n+1}(n\vec{b}+\vec{c}) + n\vec{c} + \vec{a} + \frac{n}{n+1}(n\vec{a}+\vec{b}).$$

В полученном выражении коэффициенты при $\vec{a}$ и $\vec{c}$ равны (они равны $1+\frac{n^2}{n+1}$). Кроме того, $\vec{a}+\vec{b}\vec{c} = \vec{0}$, поэтому вектор $\overrightarrow{A_2C_2}$ пропорционален $\vec{b}$, т.е. $A_2C_2 \parallel AC$. Для остальных прямых доказательство аналогично.

З-ча **2**. Расположить на прямой систему отрезков длины l, не имеющих общих концов и общих точек так, чтобы бесконечная арифметическая прогрессия с любой разностью и любым начальным членом имела общую точку с некоторым отрезком системы.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дано уравнение

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \cdots - a_{n-1}x - a_n = 0,$$

где $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$. Доказать, что это уравнение не может иметь двух положительных корней.

Реш **3**. Перепишем данное уравнение в виде

$$1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}.$$

При $x > 0$ функция $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$ монотонно убывает, поэтому она не может принимать значение 1 при двух различных положительных значениях x.

З-ча **4**. См. задачу 2 для 8 класса.

З-ча **5**. Пять человек играют несколько партий в домино (два на два) так, что каждый играющий имеет каждого один раз партнёром и два раза противником. Найти количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

Реш **5**. О т в е т : 5 партий; распределение играющих единственно (с точностью до их нумерации). Посмотрим сначала, с кем играл 1-й. Можно считать, что 1-й и 2-й сыграли против 3-го и 4-го, а 1-й и 5-й сыграли против 2-го и 3-го (этого можно дбиться, поменяв местами 3-го и 4-го). 3-й игрок уже был два раза противником 1-го, поэтому против 1-го и 4-го играют 2-й и 5-й. После этого 2-й не может играть против 1-го, поэтому против 1-го и 3-го играют 4-й и 5-й. Остаётся последняя партия: 2-й и 4-й играют против 3-го и 5-го.

10 класс

З-ча **1**. Доказать, что если $\frac{p}{q}$ — несократимая рациональная дробь, являющаяся корнем полинома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

с целыми коэффициентами, то $p - kq$ есть делитель числа $f(k)$ при любом целом k.

Реш **1**. Многочлен $f(x)$ делится на $x - \frac{p}{q}$, поэтому $f(x) = g(x)\left(x - \frac{p}{q}\right)$. Пусть $g(x) = b_0x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$. Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1 - b_0\frac{p}{q}$, $a_2 = b_2 - b_2\frac{p}{q}$, … , $a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}\frac{p}{q}$, $a_n = -b_{n-1}\frac{p}{q}$. Число b_0 целое. Равенство $qa_1 = qb_1 - pb_0$ показывает, что число qb_1 целое. Равенство $q^2a_2 = q^2b_2 - qb_1p$ показывает, что число q^2b_2 целое и т.д. Таким образом, многочлен $q^{n-1}g(x)$ имеет целые коэффициенты.

Равенство $q^nf(k) = q^{n-1}g(k)(qk-p)$ показывает, что число $q^nf(k)$ делится на $qk-p$. Числа q^n и $qk-p$ взаимно простые, поэтому число $f(k)$ делится на $qk-p$.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. На плоскости P стоит прямой круговой конус. Радиус основания r, высота — h. На расстоянии H от плоскости и l от высоты конуса находится источник света. Какую часть окружности радиуса R, лежащей в плоскости P и концентрической с окружностью, лежащей в основании конуса, осветит этот источник?

Реш **3**. Рассмотрим сначала случай, когда $H > h$. Пусть S — вершина конуса, S' — точка пересечения плоскости основания конуса с прямой, проходящей через точку S и источник света. Покажем, что тень от конуса представляет собой фигуру, заштрихованную на рис.???(а). Действительно, если A — точка основания конуса, то тень отрезка SA — это отрезок $S'A$. Аналогичные рассуждения показывают, что если $H = h$, то тень — это множество, изображённое на рис.???(б), а если $H < h$, то то тень — это множество, изображённое на рис.???(в).

Несложные вычисления с подобными треугольниками показывают, что расстояние от точки S' до центра конуса равно $\left|\frac{h}{H-h}\right| = s$. Пусть $\cos\alpha = r/R$ и $\cos\beta = r/S$. При $H > h$ угловая величина неосвещённой дуги равна $\beta - \alpha$; при $H = h$ она равна $\frac{\pi}{2} - \alpha$; при $H < h$ она равна $\pi - (\alpha + \beta)$.

З-ча **4**. Имеется 1955 точек. Какое максимальное число троек можно из них выбрать, так, чтобы каждые две тройки имели одну общую точку?

Реш **4**. Ответ: $1954/2 = 977$ троек; нужно выбрать одну точку, оставшиеся точки разбить на пары и составлять тройки из выбранной точки и этих пар.

Предположим, что есть две пары троек, у которых общие точки разные. Если все четыре тройки, входящие в эти пары, разные, то получаем конфигурацию, изображённую на рис.???(а), а если одна тройка является общей для этих двух пар, то получаем конфигурацию, изображённую на рис.???(б). Из точек, входящих в эти конфигурации, больше нельзя составить ни одной дополнительной тройки так, чтобы выполнялось требуемое условие. Если в тройку входит какая-либо другая точка, то в эту тройку должны входить две точки конфигурации, помеченные одинаковыми цифрами. Поэтому дополнительных троек не может быть больше трёх (иначе появятся тройки, имеющие не одну, а две общие точки). В результате мы получаем гораздо меньше 977 троек.

З-ча **5**. Дан треугольник $A_0B_0C_0$. На его сторонах A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. На сторонах A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ взяты соответственно точки C_2, A_2, B_2, и вообще, на сторонах A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n, треугольника $A_nB_nC_n$ взяты точки C_{n+1}, A_{n+1}, B_{n+1}. Известно, что

$$\frac{A_0B_1}{B_1C_0} = \frac{B_0C_1}{C_1A_0} = \frac{C_0A_1}{A_1B_0} = k, \frac{A_1B_2}{B_2C_1} = \frac{B_1C_2}{C_2A_1} = \frac{C_1A_2}{A_2B_1} = \frac{1}{k^2}$$

и вообще,

$$\frac{A_nB_{n+1}}{B_{n+1}C_n} = \frac{B_nC_{n+1}}{C_{n+1}A_n} = \frac{C_nA_{n+1}}{A_{n+1}B_n} = \begin{cases} k^{2^n} & \text{— при чётном } n. \\ \frac{1}{k^{2^n}} & \text{— при нечётном } n. \end{cases}$$

Доказать, что треугольник ABC, образованный пересечением прямых A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1, содержится в треугольнике $A_nB_nC_n$ при любом n.

Реш **5**. То, что треугольник ABC содержится в треугольнике $A_1B_1C_1$, очевидно. Покажем, что точки A_2, B_2, C_2 являются точками пересечения сторон треугольника $A_1B_1C_1$ с прямыми A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1. Поместим в точки A_0, B_0, C_0 массы $1+k^3$, k, k^2. Центром масс этой системы является точка пересечения отрезков A_0A_1 и B_1C_1. Действительно, C_1 — центр масс точек A_0 и B_0 с массами 1 и k, B_1 — центр масс точек A_0 и C_0 с массами k^3 и k^2, A_1 — центр масс точек B_0 и C_0 с массами k и k^2. Таким образом, если A' — точка пересечения отрезков A_0A_1 и B_1C_1, то $B_1A' : A'C_1 = (1+k) : (k^2+k^3) = 1 : k^2$, поэтому $A' = A_2$. Для точек B_2 и C_2 доказательство аналогично.

Доказанный результат означает следующее. Для треугольника $A_1B_1C_1$ мы делаем то же самое, что и для треугольника $A_0B_0C_0$, лишь с заменой коэффициента k на $1/k^2$; треугольник ABC при этом остаётся тем же самым. Полученный треугольник $A_2B_2C_2$ снова содержит треугольник ABC и т.д.

XIX олимпиада (1956)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Докажите, что не существует на плоскости четырех точек A, B, C и D таких, что все треугольники ABC, BCD, CDA, DAB остроугольные.

Реш **1**. Мы предполагаем, что никакие три из четырёх данных точек не лежат на одной прямой. Возможны два различных расположения четырёх точек на плоскости.

1) Точки A, B, C и D являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Сумма углов четырёхугольника равна $360°$, поэтому не все его углы острые. Возьмём не острый угол четырёхугольника; ему соответствует не остроугольный треугольник.

2) Точки A, B, C и D не являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Тогда одна из них лежит внутри треугольника с вершинами в остальных точках. Пусть для определённости точки D лежит внутри треугольника ABC. Сумма трёх углов с вершиной D равна $360°$, поэтому один из них не меньше $120°$. Значит, угол при вершине D в одном из треугольников BCD, CDA, DAB не острый.

З-ча **2**. Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

Реш **2**. Ответ: 18, 45, 90 и 99.

По условию сумма цифр числа a и числа $9a$ одна и та же. Поэтому согласно признаку делимости на 9 число a делится на 9. Двузначные числа, делящиеся на 9, следующие: 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90 и 99. Из них числа 27, 36, 54, 63, 72 и 81 не обладают требуемым свойством; в этом можно убедиться, умножая их, соответственно, на 7, 8, 7, 3, 4 и 9. Оставшиеся числа требуемым свойством обладают.

З-ча **3**. Имеется замкнутая самопересекающаяся ломаная. Известно, что она пересекает каждое свое звено ровно один раз. Докажите, что число звеньев чётно.

Реш **3**. Через точку самопересечения проходят ровно два звена ломаной (если бы проходили три звена, то каждое из них ломаная пересекала бы по крайней мере два раза). Кроме того, на каждом звене лежит ровно одна точка самопересечения. Поэтому, сопоставив точке самопересечения пару пересекающихся в ней звеньев, мы получим разбиение звеньев на пары.

З-ча **4**. Найти все числа, на которые может быть сократима при целом значении l дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$.

Реш **4**. Вычислим НОД$(5l+6, 8l+7)$, пользуясь тем, что НОД(a,b) = НОД$(a-b,b)$. В результате получим НОД$(5l+6, 8l+7)$ = НОД$(5l+6, 3l+1)$ = НОД$(2l+5, 3l+1)$ = НОД$(2l+5, l-4)$ = НОД$(l+9, l-4)$ = НОД$(13, l-4)$. Число 13 простое, поэтому данная дробь может быть сократима только на 13. При $l=4$ мы получаем дробь $\frac{26}{39}$, которая действительно сократима на 13.

З-ча **5**. Какое наименьшее число точек можно выбрать на окружности длины 1956 так, чтобы для каждой из этих точек нашлась ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояния измеряются по окружности)?

Реш **5**. Ответ: 1304.

Пусть A — одна из выбранных точек, B и C — выбранные точки, удалённые от неё на расстояния 1 и 2 соответственно. Расположение в порядке ABC невозможно, поскольку в таком случае для точки B есть две выбранные точки на расстоянии 1. Поэтому точки расположены в таком порядке: $C\ \ AB$ (или $BA\ \ C$). Пусть D — точка, удалённая от C на расстояние 1. Расположение $CDAB$, очевидно, невозможно. Поэтому расположение такое: $DC\ \ AB$. Пусть, далее, E — точка, удалённая от B на расстояние 1. Она расположена следующим образом: $DC\ \ AB\ \ E$. Продолжая эти рассуждения, мы увидим, что окружность длины 1956 окажется разбитой на $1956/3 = 652$ дуги длины 3 (концами этих дуг служат точки A, C, E, ...). На каждой дуге лежит одна точка. Всего получаем $2 \cdot 652 = 1304$ точки. Все эти точки обязательно должны присутствовать.

8 класс

З-ча **1**. На сторонах AB и CB треугольника ABC откладываются равные отрезки произвольной длины AD и CE. Найти геометрическое место середин отрезков DE.

Реш **1**. Пусть X — середина отрезка DE, M — середина отрезка AC. Достроим треугольники ADX и CEX до параллелограммов $ADXA'$ и $CEXC'$. Точка X является серединой отрезка DE, поэтому отрезки AA' и $C'C$ равны. Ясно также, что эти отрезки параллельны, а значит, $AA'CC'$ — параллелограмм.

Поэтому точка M — середина отрезка $A'C'$. Из равенства отрезков AD и CE следует, что треугольник $A'XC'$ равнобедренный. Поэтому его медиана XM является также и биссектрисой. Следовательно, прямая XM параллельна биссектрисе угла B треугольника ABC. Таким образом, точка X лежит на фиксированной прямой, проходящей через точку M. Искомое ГМТ — отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника ABC.

З-ча **2**. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с третьего знака после запятой (т.е. взято приближение α с недостатком с точностью до $0,01$). Полученное число делится на α и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

Реш **2**. Ответ: 0, $\frac{50}{100}$, $\frac{51}{100}$, $\ldots$, $\frac{99}{100}$, 1.

Пусть $\alpha = \frac{n}{100} + \alpha_1$, где n — целое число и $0 \leqslant \alpha_1 < \frac{1}{100}$. Пусть, далее, $\frac{1}{\alpha}\frac{n}{100} = \frac{m}{100} + \alpha_2$, где m — целое число и $0 \leqslant \alpha_2 < \frac{1}{100}$. Нас интересует число $\frac{m}{100}$. Ясно, что $100\alpha = n + 100\alpha_1$, поэтому $\frac{n}{100\alpha} = \frac{n}{n+100\alpha_1} \leqslant 1$. Если $n = 0$, то $\frac{m}{100} = 0$. Если же $n > 0$, то $\frac{n}{n+100\alpha_1} > \frac{1}{2}$, поскольку $100\alpha_1 < 1$. Дробь $\frac{n}{n+100\alpha_1}$ может принимать все значение от $1/2$ до 1. Действительно, положим $n = 1$. При изменении α_1 от 0 до $\frac{1}{100}$ число $\frac{1}{1+100\alpha_1}$ изменяется от 1 до $1/2$.

З-ча **3**. На окружности длины 15 выбрано n точек, так что для каждой имеется ровно одна выбранная точка на расстоянии 1 и ровно одна на расстоянии 2 (расстояние измеряется по окружности). Докажите, что n делится на 10.

Реш **3**. Из решения задачи 5 для 7 класса следует, что минимальное число выбранных точек равно 10. Кроме того, система выбранных точек состоит из нескольких наборов таких десяток точек.

З-ча **4**. Пусть a, b, c, d, l — целые числа. Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad - bc$ делится на k.

Реш **4**. Предположим, что $al + b = km$ и $cl + d = kn$. Умножим первое уравнение на $-c$, а второе на a. Сложив эти уравнения, получим $ad - bc = k(na - mc)$. Следовательно, $ad - bc$ делится на k.

З-ча **5**. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Все числа в таблице различны. Докажите, что наибольшее число стоит с края (т.е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

Реш **5**. Предположим, что наибольшее число a стоит не с края. Тогда у него в таблице есть все четыре соседних числа a_1, a_2, a_3, a_4 и при этом $a = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$. Но $a > a_1$, $a > a_2$, $a > a_3$, $a > a_4$. Поэтому $a = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4$. Приходим к противоречию.

9 класс

З-ча **1**. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ взят четырехугольник $KLMN$, образованный центрами тяжести треугольников ABC, BCD, DBA и CDA. Доказать, что прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, пересекаются в той же точке, что и прямые, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника $KLMN$.

Реш **1**. Указанные прямые пересекаются в центре масс четырёхугольника $ABCD$, т.е. в центре масс системы точек A, B, C, D с одинаковыми массами.

З-ча **2**. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с четвертого знака после запятой (т.е. взято приближение α с недостатком с точностью до $0,001$). Полученное число делится на α и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

Реш **2**. Ответ: 0, $\frac{500}{1000}$, $\frac{501}{1000}$, $\ldots$, $\frac{999}{1000}$, 1. См. решение задачи 2 для 8 класса.

З-ча **3**. На клетчатой бумаге написана таблица, причем в каждой клетке стоит число, равное среднему арифметическому четырех чисел, стоящих в соседних клетках. Из таблицы выбран кусок. Докажите, что если некоторое число больше всех остальных на этом куске, то оно стоит с края (т.е. по крайней мере одна из соседних клеток отсутствует).

Реш **3**. См. решение задачи 5 для 8 класса.

З-ча **4**. Даны положительные числа h, s_1, s_2 и расположенный в пространстве треугольник ABC. Сколькими способами можно выбрать точку D так, чтобы в тетраэдре $ABCD$ высота, опущенная из вершины D, была равна h, а площади граней ACD и BCD соответственно s_1 и s_2 (исследовать все возможные случаи)?

Реш **4**. Ответ: 0, 2, 4 или 8.

Чтобы высота, опущенная из вершины D, была равна h, точка D должна лежать в одной из двух плоскостей Π_1 и Π_2, параллельных плоскости ABC. Чтобы площадь грани ACD была равна s_1, точка D

должна лежать на цилиндре с осью AC, а чтобы площадь грани BCD была равна s_2, точка D должна лежать на цилиндре с осью BC. Пересечение плоскости Π_1 с первым цилиндром — это либо пара прямых, либо одна прямая, либо пустое множество, причём прямые должны быть параллельны AC. Для второго цилиндра получаются прямые, параллельные прямой BC, которая пересекает прямую AC. Поэтому при пересечении цилиндров плоскостью Π_1 получается либо пустое множество, либо пара пересекающихся прямых, либо прямая, пересекающая пару параллельных прямых, либо пара параллельных прямых, пересекающая другую пару параллельных прямых. Количество точек, принадлежащих обоим цилиндрам и плоскости, равно соответственно 0, 1, 2 и 4. Столько же точек пересечения получаем и для плоскости Π_2.

З-ча **5**. Пусть a, b, c, d, l — целые числа. Докажите, что если дробь $\frac{al+b}{cl+d}$ сократима на число k, то $ad-bc$ делится на k.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах треугольника. Доказать, что сторона квадрата меньше $2r$, но больше $\sqrt{2}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Реш **1**. Пусть две вершины рассматриваемого квадрата лежат на стороне AB. Окружность S_1, вписанная в этот квадрат, касается стороны AB и расположена строго внутри данного треугольника ABC (она заведомо не касается сторон AC и BC). Поэтому существует треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности S_1, а сам он расположен внутри треугольника ABC, причём не совпадает с ним. Следовательно, радиус окружности S_1 меньше r. Но сторона квадрата равна удвоенному радиусу окружности S_1.

Рассмотрим теперь окружность S_2, описанную вокруг квадрата. Она имеет общую точку с каждой стороной треугольника ABC, причём по крайней мере стороны AB она не касается. Поэтому существует треугольник $A_2B_2C_2$, стороны которого параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности S_2, а сам он содержит треугольник ABC, причём не совпадает с ним. Следовательно, радиус окружности S_2 больше r. Но сторона квадрата равна радиусу окружности S_2, умноженному на $\sqrt{2}$.

З-ча **2**. В десятичной записи положительного числа α отброшены все десятичные знаки, начиная с пятого знака после запятой (т.е. взято приближение α с недостатком с точностью до $0,0001$). Полученное число делится на α и частное снова округляется с недостатком с той же точностью. Какие числа при этом могут получиться (указать все значения)?

Реш **2**. О т в е т : 0, $\frac{5000}{10000}$, $\frac{5001}{10000}$, $\ldots$, $\frac{9999}{10000}$, 1. См. решение задачи 2 для 8 класса.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 8 класса.

З-ча **4**. Дана замкнутая пространственная ломаная. Некоторая плоскость пересекает все её звенья: A_1A_2 в точке B_1, A_2A_3 — в точке B_2, $\ldots$, A_nA_1 — в точке B_n. Докажите, что

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=1.$$

Реш **4**. Рассмотрим проекцию на прямую, ортогональную плоскости сечения. Все точки B_1, $\ldots$, B_n проецируются в одну и ту же точку B. Пусть A_1', $\ldots$, A_n' — проекции точек A_1, $\ldots$, A_n. Тогда

$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdots\frac{A_nB_n}{B_nA_1}=\frac{A_1'B}{BA_2'}\frac{A_2'B}{BA_3'}\cdots\frac{A_n'B}{BA_1'}=1.$$

З-ча **5**. Докажите, что система уравнений

$$\begin{aligned} x_1-x_2 &= a,\\ x_3-x_4 &= b,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &= 1 \end{aligned}$$

имеет хотя бы одно положительное решение

$$x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0$$

тогда и только тогда, когда $|a|+|b|<1$.

Реш 5. Если $a \geqslant 0$, то запишем первое уравнение в виде $x_1 = x_2 + a$, а если $a < 0$, то запишем его в виде $x_2 = x_1 - a$. Во втором случае сделаем замену $x_1' = x_2$, $x_2' = x_1$. Таким образом, можно считать, что $x_1 = x_2 + a$ и $a \geqslant 0$. Аналогично можно считать, что $x_3 = x_4 + b$ и $b \geqslant 0$. Поэтому если данная система имеет положительное решение, то $1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2x_2 + 2x_4 + a + b > a + b$ (если хотя бы одно их чисел a, b отрицательное, то мы получаем неравенство $1 > |a| + |b|$).

Предположим теперь, что $a + b < 1$, причём числа a и b неотрицательные. Тогда можно положить $x_2 = x_4 = (1 - a - b)/4$, $x_1 = x_2 + a$, $x_3 = x_4 + b$. В результате получим положительное решение данной системы.

Второй тур

7 класс

З-ча 1. Точка O — центр круга, описанного около треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 симметричны точке O относительно сторон треугольника ABC. Докажите, что все высоты треугольника $A_1B_1C_1$ проходят через точку O, а все высоты треугольника ABC проходят через центр круга, описанного около треугольника $A_1B_1C_1$.

Реш 1. Пусть A_2, B_2, C_2 — середины сторон CB, BA, AC. Ясно, что $OA_2 \perp BC$ и $BC \| B_2C_2 \| B_1C_1$. Поэтому $OA_1 \perp B_1C_1$, т.е. OA_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично доказывается, что OB_1 и OC_1 тоже являются высотами.

Ясно также, что $B_1C_1 = 2B_2C_2 = BC$, поэтому BCB_1C_1 — параллелограмм. Это означает, что отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, которая является их серединой. Аналогично доказывается, что точка P является серединой отрезка AA_1. Таким образом, при симметрии относительно точки P треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. При этой симметрии точка O, которая является центром описанной окружности треугольника ABC и точкой пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$, переходит в точку, которая является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ и точкой пересечения высот треугольника ABC.

З-ча 2. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 делят окружность радиуса 1 на шесть равных частей. Из A_1 проведен луч l_1 в направлении A_2, из A_2 — луч l_2 в направлении $A_3, \ldots$, из A_6 — луч l_6 в направлении A_1. Из точки B_1, взятой на луче l_1, опускается перпендикуляр на луч l_6, из основания этого перпендикуляра опускается перпендикуляр на l_5 и т.д. Основание шестого перпендикуляра совпало с B_1. Найти отрезок B_1A_1.

Реш 2. О т в е т : $B_1A_1 = 2$.

Пусть B_2, B_3, $\ldots$, B_7 — основания перпендикуляров, опущенных на l_6, l_5, $\ldots$, l_1; $x_1 = A_2B_1$, $x_2 = A_1B_2$, $x_3 = A_6B_3$, $\ldots$, $x_7 = A_2B_7$. Тогда $x_{k+1} = \frac{1}{2}(1 + x_k)$. По условию $x_1 = x_7$. Но

$$x_7 = \frac{1}{2}(1 + x_6) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x_5)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + x_5)\right)\right) = \ldots,$$

поэтому

$$x_7 = \frac{1}{2} + \frac{x_6}{2} = \frac{3}{4} + \frac{x_5}{4} = \frac{7}{8} + \frac{x_4}{8} = \cdots = \frac{63}{64} + \frac{x_1}{64}.$$

Таким образом, получаем уравнение $\frac{63}{64} + \frac{x_1}{64} = x_1$, откуда $x_1 = 1$. Ясно также, что $B_1A_1 = 1 + x$.

З-ча 3. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, а во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

Реш 3. О т в е т : нет, не может.

Будем подчёркивать положительные числа одной чертой, а отрицательные числа, сумма которых со следующим числом положительна, двумя чертами. Ясно, что после каждого подчёркнутого двумя чертами числом a стоит число b, подчёркнутое одной чертой, причём $a + b > 0$. Подчёркнутые числа разбиваются на следующие группы: пары, состоящие из подчёркнутого двумя чертами числа и следующего за ним числа, и все остальные подчёркнутые числа. Сумма чисел в каждой группе положительна.

З-ча 4. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы: по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на одной из диагоналей, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно этой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любом столбце меньше 1035.

Реш 4. Предположим, что сумма чисел в некотором столбце равна $S \geqslant 1035$. Рассмотрим строку, симметричную этому столбцу относительно выделенной диагонали. Сумма чисел в этой строке тоже равна S, а сумма всех чисел, стоящих в этом столбце и этой строке, равна $2S - s$, где s — число, стоящее на их пересечении. Число s стоит на выделенной диагонали, поэтому $s \leqslant 112$. Следовательно, $2S - s \geqslant 2 \cdot 1035 - 112 = 1958 > 1956$. Приходим к противоречию.

З-ча **5**. На столе лежат 15 журналов, закрывающих его целиком. Докажите, что можно забрать семь журналов так, чтобы оставшиеся журналы закрывали не меньше $8/15$ площади стола.

(*Эту задачу не решил никто из участников олимпиады.*)

Реш **5**. Докажем сначала, что если n журналов покрывают площадь S, то можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь не менее $(n-1)S/n$. Если после того как мы уберём некоторый журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь меньше $(n-1)S/n$, то площадь, которую покрывает только этот журнал, больше S/n. Предположим, что после того как мы уберём произвольный журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь меньше $(n-1)S/n$. Тогда площадь, которую покрывает только один (произвольный) журнал, больше S/n. Поэтому площадь, которую покрывают $n-1$ журналов, больше $(n-1)S/n$. Приходим к противоречию.

Пусть 15 журналов покрывают площадь S. Тогда можно убрать один журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь $S_1 \leqslant \frac{14}{15}S$. Затем можно убрать второй журнал так, чтобы оставшиеся журналы покрывали площадь $S_2 \leqslant \frac{13}{14}S_1 \leqslant \frac{13}{15}S$, и т.д. После того как мы уберём седьмой журнал, оставшиеся журналы будут покрывать площадь $S_7 \leqslant \frac{8}{9}S_6 \leqslant \frac{8}{15}S$.

8 класс

З-ча **1**. Груз весом $13,5$ т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках.(Весом пустого ящика можно пренебречь.)

Реш **1**. Выделим 8 машин и будем последовательно их грузить, причём каждый раз тот ящик, который уже нельзя погрузить, будем ставить рядом с машиной. Погруженные ящики вместе с ящиками, стоящими рядом с машинами, весят более $8 \cdot 1,5 = 12$ т, поэтому оставшиеся ящики весят менее $1,5$ т; их можно увезти на одной полуторатонке. Поскольку $4 \cdot 350 = 1400 < 1500$, на одной машине можно увезти любые 4 ящика. Значит, 8 ящиков, стоящих рядом с машинами, можно увезти на двух оставшихся полуторатонках.

З-ча **2**. 64 неотрицательных числа, сумма которых равна 1956, расположены в форме квадратной таблицы по восемь чисел в каждой строке и в каждом столбце. Сумма чисел, стоящих на двух диагоналях, равна 112. Числа, расположенные симметрично относительно любой диагонали, равны. Докажите, что сумма чисел в любой строке меньше 518.

Реш **2**. Предположим, что сумма чисел в некоторой строке равна $S \geqslant 518$. Рассмотрим два столбца, симметричных этой строке относительно двух диагоналей, и ещё строку, симметричную этим столбцам. Число 8 чётно, поэтому мы получим два разных столбца и две разных строки. На пересечениях этих строк и столбцов стоят 4 числа, сумма которых равна $s \leqslant 112$. Сумма всех чисел, стоящих в этих двух строках и двух столбцах равна $4S - s \geqslant 4 \cdot 518 - 112 = 1960 > 1956$. Приходим к противоречию.

З-ча **3**. Все точки данного отрезка AB проектируются на всевозможные прямые, проходящие через данную точку O. Найти геометрическое место этих проекций.

Реш **3**. Если A' — проекция точки A на прямую, проходящую через точку O, то $\angle OA'A = 90^\circ$, поэтому точка A' лежит на окружности с диаметром OA (мы предполагаем, что прямые проводятся на плоскости). Рассмотрим две окружности с диаметрами OA и OB. Искомое ГМТ состоит из точек, лежащих внутри одной из этих окружностей, но вне другой (рис.???).

З-ча **4**. 100 чисел, среди которых есть положительные и отрицательные, выписаны в ряд. Подчеркнуто, во-первых, каждое положительное число, во-вторых, каждое число, сумма которого со следующим положительна, и, в-третьих, каждое число, сумма которого с двумя следующими положительна. Может ли сумма всех подчеркнутых чисел оказаться отрицательной? Равной нулю?

Реш **4**. Ответ : нет, не может.

Будем подчёркивать числа следующим образом: 1) положительные числа одной чертой; 2) отрицательные числа, сумма которых со следующим числом положительна, двумя чертами; 3) отрицательные числа, для которых сумма со следующим числом неположительна, но сумма со следующими двумя числами положительна, тремя чертами. После каждого подчёркнутого двумя чертами числом a стоит число b, подчёркнутое одной чертой, причём $a + b > 0$. После каждого подчёркнутого тремя чертами числом a стоит число b, подчёркнутое двумя чертами, а за ним стоит число c, подчёркнутое одной чертой. При этом $a + b + c > 0$. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём все тройки, состоящие из числа, подчёркнутого тремя чертами, и двух следующих за ним числами. Среди оставшихся подчёркнутых чисел возьмём пары, состоящие из подчёркнутого двумя чертами числа и следующего за ним числа. После этого возьмём все остальные подчёркнутые числа. Сумма чисел в каждой группе положительна.

З-ча **5**. В прямоугольнике площадью 5 кв. единиц расположены девять прямоугольников, площадь каждого из которых равна единице. Докажите, что площадь общей части некоторых двух прямоугольников больше или равна 1/9.

Реш **5**. Предположим, что площадь общей части любых двух прямоугольников меньше 1/9. Покажем, что тогда они занимают площадь больше 5. Занумеруем прямоугольники произвольным образом. Первый прямоугольник занимает площадь 1. Добавим второй прямоугольник. Площадь общей части первого и второго прямоугольника меньше 1/9, поэтому добавится площадь больше 8/9. Добавим третий прямоугольник. Площадь общей части третьего прямоугольника с первым и вторым меньше 2/9, поэтому добавится площадь больше 7/9 и т.д. В результате получим, что все девять прямоугольников занимают площадь больше

$$1 + \frac{8}{9} + \frac{7}{9} + \cdots + \frac{1}{9} = 5.$$

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **2**. В кубе, ребро которого равно 13, выбрано 1956 точек. Можно ли в этот куб поместить кубик с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

Реш **2**. Ответ: да, можно. Разрежем данный куб на $13^3 = 2197$ кубиков с ребром 1. Если бы *внутри* каждого из этих кубиков была выбранная точка, то количество выбранных точек было бы не меньше 2197, что противоречит условию. Следовательно, внутри по крайней мере одного из этих кубиков не лежит ни одной выбранной точки.

З-ча **3**. Взяли три числа x, y, z. Вычислили абсолютные величины попарных разностей $x_1 = |x - y|$, $y_1 = |y - z|$, $z_1 = |z - x|$. Тем же способом по числам x_1, y_1, z_1 построили числа x_2, y_2, z_2 и т.д. Оказалось, что при некотором n $x_n = x$, $y_n = y$, $z_n = z$. Зная, что $x = 1$, найти y и z.

Реш **3**. Ответ: $y = z = 0$.

Числа x_n, y_n, z_n неотрицательны, поэтому числа x, y, z тоже неотрицательны. Если бы все числа x, y, z были положительны, то наибольшее из чисел x_1, y_1, z_1 было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z, а тогда и наибольшее из чисел x_n, y_n, z_n было бы строго меньше наибольшего из чисел x, y, z. Поэтому среди чисел x, y, z есть 0. Аналогично доказывается, что среди чисел x_1, y_1, z_1 есть 0 (при $n = 1$ доказывать ничего не нужно, потому что тогда $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$). Это означает, что два из чисел x, y, z равны. В итоге получаем, что неупорядоченный набор чисел x, y, z может быть равен либо 0, 0, 1, либо 0, 1, 1. Очевидно, что второй набор не обладает требуемым свойством.

З-ча **4**. Четырёхугольник описан около окружности. Докажите, что прямые, соединяющие соседние точки касания и не пересекающиеся в одной из этих точек, пересекаются на продолжении диагонали или параллельны ей.

Реш **4**. При решении этой задачи удобно считать, что четырёхугольник составлен из двух треугольников, поэтому введём следующие обозначения: $ACBC'$ — данный четырёхугольник, A_1 и B_1 — точки касания со сторонами BC и AC, A_1' и B_1' — точки касания со сторонами BC' и AC', C_1 и C_1' — точки, в которых прямые A_1B_1 и $A_1'B_1'$ пересекают прямую AB (точки C_1 и C_1' определены лишь в том случае, когда соответствующие прямые не параллельны).

Если $A_1B_1 \| AB$, то $AB_1 : BA_1 = B_1C : A_1C = 1$. Поэтому $AB_1 = BA_1$, а значит, $AB_1' = BA_1'$, поскольку $AB_1 = AB_1'$ и $BA_1 = BA_1'$. Таким образом, $A_1'B_1' \| AB$.

Будем теперь считать, что точки C_1 и C_1' определены; нужно доказать, что они совпадают. Согласно теореме Менелая $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Учитывая, что $A_1C = B_1C$, получаем $AC_1 : C_1B = AB_1 : A_1B$. Аналогично $AC_1' : C_1'B = AB_1' : A_1'B$. Но $AB_1 = AB_1'$ и $BA_1 = BA_1'$. Поэтому $AC_1 : C_1B = AC_1' : C_1'B$, а значит, $C_1 = C_1'$, поскольку обе эти точки лежат вне отрезка AB.

З-ча **5**. На клетчатой бумаге выбраны три точки A, B, C, находящиеся в вершинах клеток. Докажите, что если треугольник ABC остроугольный, то внутри или на сторонах его есть по крайней мере еще одна вершина клетки.

Реш **5**. Построим прямоугольник со сторонами, идущими по линиям клетчатой бумаги, так, чтобы вершины A, B, C лежали на его сторонах. Ни одна из вершин A, B, C не может оказаться внутри этого прямоугольника, поскольку иначе угол при этой вершине был бы тупым. По крайней мере одна из точек A, B, C лежит на стороне прямоугольника, а не в его вершине, поскольку иначе треугольник ABC был бы прямоугольным. Пусть для определённости вершина A лежит на стороне прямоугольника. Введём на плоскости координаты, выбрав точку A в качестве начала координат, а эту сторону прямоугольника — в качестве оси Ox. Ось Oy направим так, чтобы прямоугольник лежал в полуплоскости $y \geqslant 0$. Ни одна из вершин B и C не лежит на оси Ox, поскольку иначе угол при вершине A был бы тупым. Таким образом, если точки B и C имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то $y_1, y_2 \geqslant 1$, а числа x_1 и x_2 имеют разные знаки. Поэтому точка с координатами $(0, 1)$ лежит внутри треугольника ABC или на его стороне BC.

10 класс

З-ча **1**. Подряд выписаны n чисел, среди которых есть положительные и отрицательные. Подчеркивается каждое положительное число, а также каждое число, сумма которого с несколькими непосредственно следующими за ним числами положительна. Докажите, что сумма всех подчеркнутых чисел положительна.

Реш **1**. Ответ: нет, не может.

Пусть a_1, a_2, ..., a_n. Подчеркнём число a_i $k+1$ чертами, если k — наименьшее число, для которого $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_{i+k} > 0$ (положительное число a_1 подчёркивается одной чертой). Ясно, что если число a_i подчёркнуто $k+1$ чертами, то числа a_{i+1}, a_{i+2}, ... a_{i+k} подчёркнуты соответственно k, $k-1$, ..., 2, 1 чертами. Подчёркнутые числа разобьём на группы следующим образом. Сначала возьмём числа, подчёркнутые наибольшим числом черт (пусть это число черт равно K), и следующие за каждым из них $K-1$ чисел. Затем возьмём числа, подчёркнутые $K-1$ чертами, и следующие за каждым из них $K-2$ чисел, и т.д. Сумма чисел в каждой группе положительна.

З-ча **2**. Девять многоугольников площади 1 расположены внутри квадрата площади 5. Докажите, что некоторые два из них имеют общую часть площади, не меньшую чем 1/9.

Реш **2**. См. решение задачи 5 для 8 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. Докажите, что если в треугольной пирамиде любые два трехгранных угла равны или симметричны, то все грани этой пирамиды равны.

Реш **4**. Рассмотрим развёртку данной пирамиды. Она представляет собой треугольник ABC, к которому приложены треугольники ABD_C, BCD_A, CAD_B. Из условия следует, что следующие 4 величины равны: суммы троек углов при вершинах A, B и C и сумма углов при вершинах D_A, D_B, D_C. Значит, каждая из этих сумм равна 180°, поскольку сумма всех 12 рассматриваемых углов представляет собой сумму углов четырёх треугольников. В итоге получаем, что развёртка представляет собой треугольник, в котором проведены три средние линии (мы воспользовались здесь тем, что $AD_B = AD_C$, $BD_A = BD_C$, $CD_A = CD_B$). Средние линии разбивают треугольник на 4 равных треугольника, поэтому грани пирамиды равны.

З-ча **5**. На продолжениях сторон A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 правильного n-угольника ($n \geqslant 5$ — *прим. ред.*) $A_1A_2 \dots A_n$ построить точки B_1, B_2, ..., B_n так, чтобы B_1B_2 было перпендикулярно к A_1A_2, B_2B_3 перпендикулярно к A_2A_3, ..., B_nB_1 перпендикулярно к A_nA_1.

Реш **5**. Пусть $x_k = A_{k+1}B_k$, α — внешний угол правильного n-угольника, a — длина его стороны. Тогда $x_1 = (a + x_2)\cos\alpha$, $x_2 = (a + x_3)\cos\alpha$, ..., $x_n = (a + x_1)\cos\alpha$. Тогда $x_1 = a_1 + b_1x_2 = a_2 + b_2x_3 = \dots = a_n + b_nx_1$, где $b_n = (\cos\alpha)^n \neq 1$. Поэтому x_1 (а также и x_k для любого k) определено однозначно. Ясно также, что мы получим решение, если положим $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$, где $x = (a + x)\cos\alpha$, т.е. $x : a = \cos\alpha : (1 - \cos\alpha)$

XX олимпиада (1957)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Найти все равнобочные трапеции, которые разбиваются диагональю на два равнобедренных треугольника.

Реш **1**. Пусть $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниими AD и BC, причём $AD > BC$. Предположим, что диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника ABC и ADC. Неравенства $AC > BC$ и $AC > BC$ показывают, что AC — основание равнобедренного треугольника ABC. Ясно также, что в треугольнике ADC сторона DC наименьшая, поэтому $AC = AD$. Если α и β — углы при основаниях равнобедренных треугольников ABC и ADC, то $\alpha+2\beta = \pi$ и $\pi-2\alpha+\beta = \pi$, поэтому $\alpha = \pi/5$ и $\beta = 2\pi/5$. Таким образом, $ABCD$ — трапеция, которую отсекает от правильного пятиугольника его диагональ.

З-ча **2**. Известно, что $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где a, b, c, d — данные целые числа, при любом целом x делится на 5. Доказать, что все числа a, b, c, d делятся на 5.

Реш **2**. Подставив $x = 0$, получим, что d делится на 5. Учитывая это и подставляя $x = \pm 1$, получим, что $a + b + c$ и $-a + b - c$ делятся на 5. Следовательно, $2b$ и $2a + 2c$ делятся на 5, а значит, b и $a + c$ делятся на 5. Подставив $x = 2$, получим, что $4(2a + c) + 4b + d$ делится на 5. Значит, $2a + c$ делится на 5 и $a = (2a + c) - (a + c)$ тоже делится на 5. Поэтому c тоже делится на 5.

З-ча **3**. Улитка ползет по столу с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут она поворачивает на 90° налево или направо, а в промежутках между поворотами ползет по прямой. Доказать, что она может вернуться в исходный пункт только через целое число часов.

Реш **3**. Пусть до возвращения в исходный пункт улитка a_1 15-минуток ползла вперёд (по сравнению с направлением движения из исходного пункта), a_2 назад, b_1 направо и b_2 налево. Тогда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ (поскольку улитка вернулась в исходный пункт), а кроме того, $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ (поскольку через каждые 15 минут улитка поворачивает). Следовательно, $a_1 = a_2 = b_1 = b_2$. Поэтому улитка вернулась в исходный пункт через $4a_1$ 15-минуток, т.е. через a_1 часов.

З-ча **4**. В прямоугольной таблице, составленной из положительных чисел, произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице.

Реш **4**. П е р в о е р е ш е н и е. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — суммы чисел в строках, $y_1, \dots, y_m$ — суммы чисел в столбцах. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число x_iy_j. Поэтому сумма чисел в i-й строке равна $x_iy_1 + x_iy_2 + \dots + +x_iy_m$. С другой стороны, эта сумма равна x_i. Таким образом, $x_i = x_i(y_1+y_2+\dots+y_m)$. Число x_i положительно; в частности, оно отлично от нуля, поэтому $y_1+y_2+\dots+y_m = 1$. Но сумма $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ это как раз и есть сумма всех чисел в таблице.

ssl Пусть a_{ji} — число, стоящее на пересечении i-го столбца и j-й строки. По условию $a_{ji} = \left(\sum_{p=1}^m a_{pi}\right)\left(\sum_{q=1}^n a_{jq}\right)$. Следовательно, $\sum_{i,j} a_{ji} = \sum_{i,j}\left(\sum_{p=1}^m a_{pi}\right)\left(\sum_{q=1}^n a_{jq}\right) = \left(\sum_{i,j} a_{ji}\right)^2$. Для числа $S = \sum_{i,j} a_{ji}$ мы получили уравнение $S^2 = S$. Но $S > 0$, поэтому $S = 1$.

З-ча **5**. От A до B 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых написаны расстояния до A и до B: $\boxed{0 \mid 999}$, $\boxed{1 \mid 998}$, …, $\boxed{999 \mid 0}$. Сколько среди них таких, на которых имеются только две различные цифры?

Реш **5**. О т в е т : 40.

Предположим, что на километровом столбе написано $\boxed{\overline{abc} \mid \overline{a_1b_1c_1}}$. Тогда $\overline{abc} + \overline{a_1b_1c_1} = 999$, поэтому $a_1 = 9 - a$, $b_1 = 9 - b$ и $c_1 = 9 - c$. Если $a = b = c$, то требуемое условие выполняется. Таких столбов будет ровно 10. Пусть теперь среди цифр a, b, c есть ровно две различных. Среди цифр a_1, b_2, c_2 будут в точности те же самые две цифры тогда и только тогда, когда эти две цифры в сумме дают 9. Таких пар цифр ровно 5: (0,9), (1,8), (2,7), (3,6) и (4,5). Трёхзначных чисел, записывающихся двумя данными цифрами ровно шесть: три из них записываются двумя цифрами a и одной цифрой b (которая стоит на одном из трёх мест), а ещё три записываются одной цифрой a и двумя цифрами b. Так мы получаем ещё $5 \cdot 6 = 30$ столбов, а всего получаем $10 + 30 = 40$ столбов.

8 класс

З-ча **1**. Найти геометрическое место четвертых вершин прямоугольников, три вершины которых лежат на двух данных концентрических окружностях, а стороны параллельны двум данным прямым.

Реш **1**. Ответ: три концентрические окружности (с тем же центром) с радиусами r, R и $\sqrt{2R^2-r^2}$, где $R>r$ — радиусы исходных окружностей.

Пусть вершины A, B и D прямоугольника $ABCD$ лежат на двух концентрических окружностях. Противоположные вершины B и D не могут лежать на меньшей окружности. Действительно, если вершина A лежит на большей окружности, а вершины B и D — на меньшей, то $\angle BAD=90^\circ$ и поэтому B и D — концы диаметра большей окружности, чего не может быть. Поэтому возможны следующие два варианта.

1) Две соседние вершины вершины лежат на одной окружности, а третья вершина — на второй. Тогда четвёртая вершины тоже лежит на второй окружности. В результате получаем исходные окружности.

2) Противопложные вершины B и D лежат на большей окружности, а вершина A — на меньшей. Пусть O — общий центр окружностей. Тогда $OA=r$, $OB=OD=R$. Поэтому $OC=\sqrt{OB^2+OD^2-OA^2}=\sqrt{2R^2-r^2}$; равенство $OB^2-OA^2=OC^2-OD^2$ легко проверяется с помощью теоремы Пифагора.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **3**. Из всех параллелограммов данной площади найти тот, у которого наибольшая диагональ минимальна.

Реш **3**. Ответ: квадрат. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, α — острый угол между его сторонами, S — площадь, d — наибольшая диагональ. Тогда $d^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha$ и $ab\sin\alpha=S$. Поэтому $d^2\geqslant a^2+b^2$ и $ab\geqslant S$, причём в обоих случаях равенство достигается лишь при $\alpha=90^\circ$. Далее, $a^2+b^2\geqslant 2ab$, поэтому $d^2\geqslant 2S$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда $a=b$ и $\alpha=90^\circ$, т.е. когда параллелограмм является квадратом.

З-ча **4**. В прямоугольной таблице произведение суммы чисел любого столбца на сумму чисел любой строки равно числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел в таблице равна единице, или все числа равны нулю.

Реш **4**. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — суммы чисел в строках, $y_1,\ldots,y_m$ — суммы чисел в столбцах. На пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число x_iy_j. Поэтому сумма чисел в i-й строке равна $x_iy_1+x_iy_2+\cdots++x_iy_m$. С другой стороны, эта сумма равна x_i. Таким образом, $x_i=x_i(y_1+y_2+\cdots+y_m)$. Сумма $y_1+y_2+\cdots+y_m$ — это как раз сумма всех чисел в таблице. Если она не равна 1, то $x_i=0$. Аналогично доказывается, что в таком случае все числа $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$ равны 0. Но тогда и все числа x_iy_j равны 0.

З-ча **5**. Известно, что $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$, где a, b, c, d, e — данные целые числа, при любом целом x делится на 7. Доказать, что все целые числа a, b, c, d, e делятся на 7.

Реш **5**. Подставив $x=0$, получим, что e делится на 7. Учитывая это и подставляя $x=\pm1$, получим, что числа $a\pm b+c\pm d$ делятся на 7. Поэтому $2(a+c)$ и $2(b+d)$ делятся на 7, а значит, $a+c$ и $b+d$ делятся на 7. Подставляя $x=\pm2$ и учитывая, что e делится на 7, получаем, что числа $2(8a\pm4b+2c\pm d)$ делятся на 7. Поэтому $4a+c$ и $4b+d$ делятся на 7. Следовательно, $3a=(4a+c)-(a+c)$ делится на 7. Поэтому a делится на 7, а значит, c делится на 7. Аналогично доказывается, что b и d делятся на 7.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **2**. Решить уравнение $x^3-[x]=3$, где $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x.

Реш **2**. Ответ: $x=\sqrt[3]{4}$.

Пусть $[x]=n$ и $x=n+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<1$. Данное уравнение записывается в виде $x^3-x+\alpha=3$. Неравенство $0\leqslant\alpha<1$ показывает, что $2<x^3-x\leqslant3$. Если $x\geqslant2$, то $x(x^2-1)\geqslant2\cdot3=6$, поэтому в этом случае неравенство $x^3-x\leqslant3$ не выполняется. Если $x<-1$, то $x(x^2-1)<0$, поэтому неравенство $2<x^3-x$ не выполняется. Таким образом, нас интересует случай, когда $-1\leqslant x<2$, т.е. $[x]=-1$, 0 или 1. Соответственно получаем уравнения $x^3+1=3$, $x^3=3$, $x^3-1=3$. Находим их решения: $x=\sqrt[3]{2}$, $x=\sqrt[3]{3}$, $x=\sqrt[3]{4}$. При этом $[\sqrt[3]{2}]\neq-1$, $[\sqrt[3]{3}]\neq0$ и $[\sqrt[3]{4}]=1$, поэтому решением исходного уравнения является только $\sqrt[3]{4}$.

З-ча **3**. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина диагонали AC, точка N — середина диагонали BD. Прямая MN пересекает стороны AB и CD в точках M' и N'. Доказать, что если $MM'=NN'$, то $BC\parallel AD$.

Реш **3**. Если точки M и N совпадают, то $ABCD$ — параллелограмм. Поэтому будем предполагать, что точки M и N различны. Предположим, что прямые AD и BC не параллельны. Пусть M'', K, N'' — середины сторон AB, BC, CD соответственно. Если $MN\|BC$, то $BC\|AD$, так как $AM=MC$ и $BN=ND$. Поэтому будем считать, что прямые MN и BC не параллельны, т.е. $M'\neq M''$ и $N'\neq N''$. Ясно, что $\overrightarrow{M''M} = \overrightarrow{BC}/2 = \overrightarrow{NN''}$ и $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{NN'}$. Поэтому $M'M'' \| N'N''$. Следовательно, $KM \| AB \| CD \| KN$, т.е. $M = N$. Получено противоречие.

З-ча **4**. Школьник едет на олимпиаду на метро, платит рубль и получает сдачу. Доказать, что если он если он обратно поедет на трамвае, то он сможет уплатить за проезд без сдачи. (*Примечание.* Проезд в метро стоил 50 коп., в трамвае — 30 коп. В обращении находились монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15 и 20 коп.)

Реш **4**.

З-ча **5**. Плоский многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ составлен из n твердых стержней, соединенных шарнирами. Доказать, что если $n > 4$, то его можно деформировать в треугольник.

Реш **5**. Пусть a — наибольшая сторона данного многоуогольника (если наибольших сторон несколько, то мы выбираем любую из них). Рассмотрим часть многоугольника, которая остаётся после выбрасывания стороны a, и возьмём точку, которая делит пополам периметр этой части. Если эта точка является вершиной многоуольника, то мы очевидным образом деформируем этот многоугольник в равнобедренный треугольник. Предположим теперь, что эта точка лежит на стороне b, а периметры частей многоугольника, заключённых между сторонами a и b, равны x и y. Тогда $x + b \geqslant y$ и $y + b \geqslant x$. Если, например, $x = 0$, то мы можем составить треугольник из отрезков a, b, y. Поэтому будем считать, что $x, y \neq 0$. Предположим, что треугольник нельзя составить ни из отрезков a, x, $y + b$, ни из отрезков a, y, $x + b$. Отрезок короче соединяющей его концы ломаной, поэтому $a < x + y + b$. Кроме того, есть неравенства $x+b \geqslant y$ и $y+b \geqslant x$. Значит, должны выполняться неравенство $a+x \leqslant y+b$ и $a+y \leqslant x+b$. Поэтому $x = y$ и $a \leqslant b$. Но по предположению $a \geqslant b$, значит, $a = b$. По условию число сторон многоугольника больше 4. Поэтому одна из ломаных длины x состоит из двух частей периметра x_1 и x_2. Легко проверить, что из отрезков длины x, $a + x_1$, $a + x_2$, где $x_1 + x_2 = x$, можно составить треугольник.

10 класс

З-ча **1**. При каких целых n число $20^n + 16^n - 3^n - 1$ делится на 323?

Реш **1**. О т в е т : при чётных n. Прежде всего заметим, что $323 = 17 \cdot 19$, поэтому число делится на 323 тогда и только тогда, когда оно делится на 17 и на 19. Число $20^n - 3^n$ делится на $20 - 3 = 17$. Далее, $16^n \equiv (-1)^n \pmod{17}$, поэтому число $16^n - 1$ делится на 17 тогда и только тогда, когда n чётно. Что касается делимости на 19, то $20^n - 1$ делится на $20 - 1 = 19$ при любом n, а при $n = 2m$ число $16^n - 3^n$ делится на $16^2 - 3^2 = 13 \cdot 19$, поэтому оно делится на 19.

З-ча **2**. В пространстве построена замкнутая ломаная так, что все звенья имеют одинаковую длину и каждые три последовательных звена попарно перпендикулярны. Доказать, что число звеньев делится на 6.

Реш **2**. Пусть e_1, e_2, e_3 — векторы трёх последовательных звеньев данной ломаной. После векторов e_2, e_3 должен идти перпендикулярный им вектор, т.е. вектор $\pm e_1$. Продолжая эти рассуждения, получаем, что последовательность векторов звеньев имеет вид e_1, e_2, e_3, $\pm e_1$, $\pm e_2$, $\pm e_3$, … . Поэтому число звеньев ломаной делится на 3. Ясно также, что количество звеньев e_1 должно быть равно количеству звеньев $-e_1$. То же самое верно для e_2 и e_3. Поэтому число звеньев чётно.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. Школьник едет на кружок на трамвае, платит рубль и получает сдачу. Доказать, что если он если он обратно также поедет в трамвае, то он сможет уплатить за проезд без сдачи. (*Примечание.* Проезд в трамвае стоил 30 коп. В обращении находились монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15 и 20 коп.)

Реш **4**.

З-ча **5**. Плоский многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ составлен из n твердых стержней, соединенных шарнирами. Можно ли его деформировать в треугольник?

Реш **5**. Если $n > 4$, то можно: см. решение задачи 5 для 9 класса. Там же доказано, что при $n = 4$ можно деформировать любой четырёхугольник, кроме параллелограмма.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Прямые OA и OB перпендикулярны. Найти геометрическое место концов M таких ломаных OM длины 1, которые каждая прямая, параллельная OA или OB, пересекает не более чем в одной точке.

Реш **1**.

З-ча **2**. Радиолампа имеет семь контактов, расположенных по кругу и включаемых в штепсель, имеющий семь отверстий. Можно ли так занумеровать контакты лампы и отверстия штепселя, чтобы при любом включении лампы хотя бы один контакт попал на свое место (т.е. в отверстие с тем же номером)?

Реш **2**.

З-ча **3**. В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наибольший угол треугольника имел наименьшую величину?

Реш **3**.

З-ча **4**. В треугольник вписана окружность, и точки касания ее со сторонами треугольника соединены между собой. В полученный таким образом треугольник вписана новая окружность, точки касания которой со сторонами являются вершинами третьего треугольника, имеющего те же углы, что и первоначальный треугольник. Найти эти углы.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дана последовательность чисел $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$, в которой каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. В этой последовательности выбрано восемь чисел подряд. Докажите, что их сумма не равна никакому числу рассматриваемой последовательности.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. В треугольнике известны две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона, чтобы наименьший угол треугольника имел наибольшую величину?

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^8$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \dots, 10^9$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Внутри равностороннего треугольника ABC находится точка O. Прямая OG, соединяющая O с центром тяжести (точкой пересечения медиан) G треугольника, пересекает стороны треугольника (или их продолжения) в точках A', B', C'. Доказать, что

$$\frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'} = 3.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2,\ \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3,\ \frac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. В неравносторонний треугольник вписана окружность, точки касания которой со сторонами приняты за вершины второго треугольника. В этот второй треугольник снова вписана окружность, точки касания которой являются вершинами третьего треугольника; в него вписана третья окружность и т.д. Докажите, что в образовавшейся последовательности треугольников нет двух подобных.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Два прямоугольника положены на плоскость так, что их границы имеют восемь точек пересечения. Эти точки соединены через одну. Доказать, что площадь полученного четырехугольника не изменится при поступательном перемещении одного из прямоугольников.

Реш **1**.

З-ча **2**. Найти все действительные решения системы

$$1 - x_1^2 = x_2,\ 1 - x_2^2 = x_3,\ \dots,\ 1 - x_{98}^2 = x_{99},\ 1 - x_{99}^2 = x_1.$$

Реш **2**.

З-ча **3**. Два равных диска насажены на одну ось. На окружности каждого из них по кругу на одинаковых расстояниях в произвольном порядке расставлены числа $1, 2, 3, \ldots, 20$. Всегда ли можно повернуть один диск относительно другого так, чтобы никакие два одинаковых числа не стояли друг против друга?

Реш **3**.

З-ча **4**. Разбить число 1957 на 12 целых положительных слагаемых a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{12} так, чтобы произведение $a_1! \cdot a_2 \cdot ! a_3! \cdot \cdots \cdot a_{12}!$ было минимально?

Реш **4**.

З-ча **5**. Три равные окружности касаются друг друга. Из произвольной точки окружности, касающейся внешним образом этих окружностей, проведены касательные к ним. Доказать, что сумма длин двух касательных равна длине третьей.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Дан четырехугольник $ABCD$. Вписать в него прямоугольник с заданными направлениями сторон.

Реш **1**.

З-ча **2**. Найти все действительные решения системы

$$1 - x_1^2 = x_2,\ 1 - x_2^2 = x_3,\ \ldots,\ 1 - x_{n-1}^2 = x_n,\ 1 - x_n^2 = x_1.$$

Реш **2**.

З-ча **3**. Точка G — центр шара, вписанного в правильный тетраэдр $ABCD$. Прямая OG, соединяющая G с точкой O, лежащей внутри тетраэдра, пересекает плоскости граней в точках A', B', C', D'. Доказать, что

$$\frac{OA'}{GA'} + \frac{OB'}{GB'} + \frac{OC'}{GC'} + \frac{OD'}{GD'} = 4.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что число всех цифр в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^k$ равно числу всех нулей в последовательности $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дано n целых чисел $a_1 = 1$, a_2, a_3, $\ldots$, a_n, причем $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и сумма всех чисел четна. Можно ли эти числа разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были равны?

Реш **5**.

XXI олимпиада (1958)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Имеется система уравнений

$$\begin{aligned} *x + *y + *z &= 0, \\ *x + *y + *z &= 0, \\ *x + *y + *z &= 0. \end{aligned}$$

Два человека поочередно вписывают вместо звездочек числа. Доказать, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

Реш **1**.

З-ча **2**. В круге проведены два диаметра AB и CD. Доказать, что если M — произвольная точка окружности, а P и Q — ее проекции на диаметры AB и CD, то длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M.

Реш **2**.

З-ча **3**. Сколько существует четырехзначных номеров (от 0001 до 9999), у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

Реш **3**.

З-ча **4**. На плоскости даны точки A и B. Построить такой квадрат, чтобы точки A и B лежали на его границе и сумма расстояний от точки A до вершин квадрата была наименьшей.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дана следующая треугольная таблица чисел:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & 1957 & 1958 \\ 1 & 3 & \dots & \dots & 3915 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \end{array}$$

Каждое число (кроме чисел верхней строчки) равно сумме двух ближайших чисел предыдущей строчки. Доказать, что число, стоящее в самой нижней строчке, делитсяя на 1958.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Внутри треугольника ABC взята точка O. На лучах OA, OB и OC построены векторы единичной длины. Доказать, что сумма этих векторов имеет длину меньшую единицы.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что если уравнения с целыми коэффициентами

$$\begin{aligned} x^2 + p_1 x + q_1 &= 0, \\ x^2 + p_2 x + q_2 &= 0 \end{aligned}$$

имеют общий нецелый корень, то $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$.

Реш **2**.

З-ча **3**. На круглой поляне радиуса R растут три круглые сосны одинакового диаметра. Центры их стволов находятся на расстоянии $\frac{R}{2}$ от центра поляны в вершинах равностороннего треугольника. Два человека, выйдя одновременно из диаметрально противоположных точек поляны, обходят поляну по краю с одинаковой скоростью и в одном направлении и всё время не видят друг друга. Увидят ли друг друга три человека, если они так же будут обходить поляну, выйдя из точек, находящихся в вершинах вписанного в поляну правильного треугольника?

Реш **3**.

З-ча **4**. Решить в целых положительных числах уравнение

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots\atop{\cdots\atop{\cdots\atop{+\cfrac{1}{1958}}}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots\atop{\cdots\atop{\cdots\atop{+\cfrac{1}{x_{1958}}}}}}}.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Проекции многоугольника на ось OX, биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, ось OY и биссектрису 2-го и 4-го координатных углов равны соответственно 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника — S. Доказать, что $S \leqslant 17,5$.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Бесконечная плоская ломаная $A_0A_1\ldots A_n\ldots$, все углы которой прямые, начинается в точке A_0 с координатами $x=0, y=1$ и обходит начало координат O по часовой стрелке. Первое звено ломаной имеет длину 2 и параллельно биссектрисе 4-го координатного угла. Каждое из следующих звеньев пересекает одну из координатных осей и имеет наименьшую возможную при этом целочисленную длину. Расстояние $OA_n = l_n$. Сумма длин первых n звеньев ломаной равна s_n. Доказать, что найдется n, для которого $\frac{s_n}{l_n} > 1958$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что если $|ax^2 - bx + c| < 1$ при любом $x, |x| \leqslant 1$, то и $|(a+b)x^2 + c| < 1$ при $|x| \leqslant 1$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трех прямых, из которых никакие две не параллельны и не совпадают?

Реш **3**.

З-ча **4**. Решить в целых положительных числах уравнение

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots\atop{\cdots\atop{\cdots\atop{+\cfrac{1}{n}}}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ldots\atop{\cdots\atop{\cdots\atop{+\cfrac{1}{x_n}}}}}}.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Отрезок длиной 3^n разбивается на три равные части. Первая и третья из них называются отмеченными. Каждый из отмеченных отрезков разбивается на три части, из которых первая и третья снова называются отмеченными и т.д. до тех пор, пока не получатся отрезки длиной 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Доказать, что для любого целого $k (1 \leqslant k \leqslant 3^n)$ можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно k.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Проекции плоского выпуклого многоугольника на ось OX, биссектрису 1-го и 3-го координатных углов, ось OY и биссектрису 2-го и 4-го координатных углов соответственно равны 4, $3\sqrt{2}$, 5, $4\sqrt{2}$. Площадь многоугольника равна S. Доказать, что $S \geqslant 10$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что $1155^{1958} + 34^{1958} \neq n^2$, где n — целое.

Реш **2**.

З-ча **3**. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь пространственная фигура, состоящая из трех прямых, из которых никакие две не параллельны и не совпадают?

Реш **3**.

З-ча **4**. На стол кладут правильный 100-угольник, в вершинах которого написаны числа $1, 2, \ldots, 100$. Затем эти числа переписывают в порядке удаления от переднего края стола. Если две вершины находятся на равном расстоянии от края, сначала выписывается левое число, затем правое. Выписаны всевозможные наборы чисел, соответствующие разным положениям 100-угольника. Вычислить сумму чисел, стоящих в этих наборах на 13-х местах слева.

Реш **4**.

З-ча **5**. Из четырех прямых на плоскости никакие две не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. По каждой прямой с постоянной скоростью идет пешеход. Известно, что 1-й встречается со 2-м, с 3-м и с 4-м, а 2-й встречается с 3-м и с 4-м. Доказать, что 3-й пешеход встретится с 4-м.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что на плоскости нельзя расположить больше четырех выпуклых многоугольников так, чтобы каждые два из них имели общую сторону.

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеются два набора из $+1$ и -1, в каждом по 1958 чисел. Доказать, что за некоторое число шагов можно превратить первый набор во второй, если на каждом шагу разрешается одновременно изменить знак у любых 11 чисел первого набора. (Два набора считаются одинаковыми, если у них на одинаковых местах стоят одинаковые числа).

Реш **2**.

З-ча **3**. Каждая грань куба заклеивается двумя равными прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой, один из которых белый, другой — черный. Можно ли эти треугольники расположить так, чтобы при каждой вершине куба сумма белых углов была равна сумме черных углов?

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что если целое $n > 2$, то

$$(1 \cdot 2 \ldots n)^2 > n^n.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Сторона клетки клетчатой бумаги равна 1. По линиям сетки построен прямоугольник со сторонами m и n. Можно ли в прямоугольнике провести по линиям сетки замкнутую ломаную, которая ровно один раз проходила бы через каждый узел сетки, расположенный внутри или на границе прямоугольника? Если можно, то какова ее длина?

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Из бумаги вырезан многоугольник. Две точки его границы соединяются отрезком, по которому многоугольник складывается. Доказать, что периметр многоугольника, получающегося после складывания, меньше периметра исходного многоугольника.

Реш **1**.

З-ча **2**. Для любых чисел a_1 и a_2, удовлетворяющих условиям $a_1 \geqslant 0$, $a_2 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 = 1$, можно найти такие числа b_1 и b_2, что $b_1 \geqslant 0$, $b_2 \geqslant 0$, $b_1 + b_2 = 1$, $(\frac{5}{4} - a_1)b_1 + 3(\frac{5}{4} - a_2)b_2 > 1$.

Доказать.

Реш **2**.

З-ча **3**. Внутри $\angle AOB$ взята точка C. Из нее опущены перпендикуляры: CD на сторону OA; CE — на сторону OB. Из точек D и E опущены перпендикуляры: EM на сторону OA; DN на сторону OB. Доказать, что $OC \perp MN$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что если целое $n > 0$, то

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n < n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Обозначим через a наибольшее число непересекающихся кругов диаметра 1, центры которых лежат внутри многоугольника M, через b — наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно покрыть весь многоугольник M.

Какое число больше: a или b?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**.

Провести из точки O n лучей на плоскости так, чтобы сумма всех попарных углов между ними была наибольшей.(Рассматриваются только углы, не превышающие $180°$.)

Реш **2**.

З-ча **3**. Игральная доска имеет форму ромба с углом $60°$. Каждая сторона ромба разделена на 9 частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба, разбивающие доску на треугольные клетки. Если на некоторой клетке поставлена фишка, проведем через эту клетку 3 прямые, параллельные сторонам и малой диагонали ромба. Клетки, которые они пересекут, будут считаться побитыми фишкой. Каким наименьшим числом фишек можно побить все клетки доски?

Реш **3**.

З-ча **4**. Обозначим через a наименьшее число кругов радиуса 1, которыми можно полностью покрыть заданный многоугольник M, через b — наибольшее число непересекающихся кругов радиуса 1 с центрами внутри многоугольника M. Какое из чисел больше, a или b?

Реш **4**.

З-ча **5**. Между зажимами A и B включено несколько сопротивлений. Каждое сопротивление имеет входной и выходной зажимы. Какое наименьшее число сопротивлений необходимо иметь и какова может быть схема их соединения, чтобы при порче любых 9 сопротивлений цепь оставалось соединяющей зажимы A и B, но не было короткого замыкания? (Порча сопротивления: короткое замыкание или обрыв.)

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Решить в целых положительных числах уравнение

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. В многоугольнике существуют такие точки A и B, что любая соединяющая их ломаная, проходящая внутри или по границе многоугольника, имеет длину больше 1. Доказать, что периметр многоугольника больше 2.

Реш **2**.

З-ча **3**. В школе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие два ученика не учатся одинаково, ни про каких двух нельзя сказать, что один из них учится лучше другого. Доказать, что число учеников в школе $\leqslant C_{2n}^{n}$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Стороны параллелограмма равны a и b. Найти отношение объемов тел, полученных при вращении параллелограмма вокруг стороны a и вокруг стороны b.

Реш **4**.

З-ча **5**. На n карточках написаны с разных сторон числа — на 1-й: 0 и 1; на 2-й: 1 и 2; …; на n-й: $n-1$ и n.

Один человек берет из стопки несколько карточек и показывает второму одну сторону каждой из них. Затем берет из стопки еще одну карточку и тоже показывает одну сторону.

Указать все случаи, в которых второй может определить число, написанное на обороте последней показанной ему карточки.

Реш **5**.

XXII олимпиада (1959)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Пусть a и b — целые числа. Напишем число b справа от числа a. Если число a четное, то разделим его на 2, если оно нечетное, то сначала вычтем из него единицу, а потом разделим его на 2. Получившееся число a_1 напишем под числом a. Справа от числа a_1 напишем число $2b$. С числом a_1 проделаем ту же операцию, что и с числом a, и, получив число a_2, напишем его под числом a_1. Справа от числа a_2 напишем число $4b$ и так далее. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не получим в левом столбце число 1. Доказать, что сумма тех чисел правого столбца, слева от которых стоят нечетные числа, равны произведению ab.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что число $2^{2^{1959}} - 1$ делится на 3.

Реш **2**.

З-ча **3**. Можно ли расположить все трехзначные числа в последовательности так, чтобы последняя цифра каждого числа была равна первой цифре следующего за ним?

Реш **3**.

З-ча **4**. Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле по одному разу и сделать наименьшее число поворотов?

Реш **4**.

З-ча **5**. Дан квадрат со стороной 1. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до сторон этого квадрата или их продолжений равна 4.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь двумч ковшами емкостью $2-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$, перелить из одной в другую ровно 1 литр?

Реш **1**.

З-ча **2**. Заметим, что если перевернуть лист, на котором написаны цифры, то цифры 0, 1, 8 не изменятся, 6 и 9 поменяются местами, остальные потеряют смысл. Сколько существует девятизначных чисел, которые при переворачивании листа не изменяются?

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Середины сторон AB и CD обозначим соответственно через K и M, точку пересечения AM и DK — через O, точку пересечения BM и CK — через P. Доказать, что площадь четырехугольника $MOKP$ равна сумме площадей треугольников BPC и AOD.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. Даны две непересекающиеся окружности с центрами в точках O_1 и O_2. Пусть a_1 и a_2 — внутренние касательные к этим окружностям, a_3 и a_4 — внешние касательные к ним. Пусть, далее, a_5 и a_6 — касательные к окружности с центром в O_1, проведенные из точки O_2, a_7 и a_8 — касательные к окружности с центром в точке O_2, проведенные из точки O_1. Обозначим через O точку пересечения a_1 и a_2. Доказать, что с центром в точке O можно провести две окружности так, чтобы первая касалась a_3 и a_4, вторая касалась a_5, a_6, a_7, a_8, причем радиус второй в два раза меньше радиуса первой.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Имеется 1959 положительных чисел $a_1, a_2 \ldots, a_{1959}$, сумма которых равна 1. Рассматриваются всевозможные комбинации из 1000 чисел, причем комбинации считаются совпадающими, если они отличаются только порядком чисел. Для каждой комбинации рассматривается произведение входящих в нее чисел. Доказать, что сумма всех этих произведений меньше 1.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 8 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. Построить окружность, проходящую через две данные точки и отсекающую от данной окружности хорду данной длины.

Реш **3**.

З-ча **4**. Рассмотрим лист клетчатой бумаги со стороной клетки, равной 1. Пусть P_k — число всех непересекающихся ломаных длины k, начинающихся в точке O — некотором фиксированном узле сетки. Доказать, что для любого k $\frac{P_k}{3^k} < 2$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что не существует тетраэдра, в котором каждое ребро являлось бы стороной плоского тупого угла.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Доказать, что не существует целых чисел x, y, z, таких, что $x^k + y^k = z^k$ при условии $z > 0; 0 < x < k; 0 < y < k; k > 2$.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 8 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. Существует ли тетраэдр, каждое ребро которого являлось бы стороной плоского тупого угла?

Реш **3**.

З-ча **4**. В квадратную таблицу $N \times N$ записаны все целые числа по следующему закону: (1) стоит на любом месте, (2) стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего (1), (3) стоит в строке с номером, равным номеру столбца, содержащего (2), и так далее. На сколько сумма чисел в столбце, содержащем (N^2), отличается от суммы чисел в строке, содержащей (1).

Реш **4**.

З-ча **5**. Дана невозрастающая последовательность чисел

$$\frac{1}{2k} = a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots ; a_n > 0; a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = 1.$$

Доказать, что найдутся k чисел, из которых самое маленькое больше половины самого большого.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Имеется два набора чисел $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$ и $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Доказать, что $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n > a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан треугольник ABC. Найти такую точку, что если ее симметрично отразить от любой стороны треугольника, то она попадает на описанную окружность.

Реш **2**.

З-ча **3**. На какое целое число надо умножить 999 999 999, чтобы получить число, состоящее из одних единиц?

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что в любом шестизначном числе можно переставить цифры так, чтобы сумма первых трех отличалась от суммы вторых трех меньше, чем на 10.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дано n чисел, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при этом $x_k = \pm 1$. Доказать, что если $x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 = 0$, то n делится на 4.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 5 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Даны 12 чисел, $a_1, a_2, \ldots a_{12}$, причем имеют место следующие неравенства:

$$\begin{array}{rcl} a_2(a_1 - a_2 + a_3) & < & 0 \\ a_3(a_2 - a_3 + a_4) & < & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{11}(a_{10} - a_{11} + a_{12}) & < & 0 \end{array}$$

Доказать, что среди этих чисел найдется по крайней мере 3 положительных и 3 отрицательных.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан треугольник ABC. Построим треугольник, стороны которого касаются вневписанных окружностей этого треугольника. Зная углы исходного треугольника, найти углы построенного.

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны два отрезка длины 1, AB и CD. Доказать, что по крайней мере одна из сторон четырехугольника $ABCD$ не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что шахматную доску размером 4 на 4 нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле ровно один раз.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Даны сто чисел, $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, сумма которых равна 1, такие, что абсолютные величины разностей $x_{k+1} - x_k$ меньше $\frac{1}{50}$ каждая. Доказать, что из них можно выбрать 50 чисел так, чтобы сумма выбранных отличалась от половины не больше, чем на одну сотую.

Реш **1**.

З-ча **2**. n отрезков длины 1 пересекаются в одной точке. Доказать, что хотя бы одна сторона $2n$-угольника, образованного их концами, не меньше стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность диаметра 1.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше $180°$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде суммы трех кубов.

Реш **4**.

З-ча **5**. В углах шахматной доски 3 на 3 стоят кони: в верхних углах — белые, в нижних — черные. Доказать, что для того, чтобы им поменяться местами, потребуется не менее 16 ходов. (Кони не обязательно ходят сначала белый, потом черный. Ходом считается ход одного коня.)

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 4 для 9 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Пусть $ABCD$ — пространственный четырехугольник, точки K_1 и K_2 делят соответственно стороны AB и CD в отношении α, точки K_3 и K_4 делят соответственно стороны BC и AD в отношении β. Доказать, что отрезки K_1K_2 и K_3K_4 пересекаются.

Реш **2**.

З-ча **3**. Даны несколько перекрывающихся кругов, занимающие на плоскости площадь, равную 1. Доказать, что из них можно выбрать некоторое количество попарно неперекрывающихся, чтобы их общая площадь была не менее $\frac{1}{9}$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны n комплексных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$, таких, что если их представлять себе как точки плоскости, то они являются вершинами выпуклого n-угольника. Доказать, что если комплексное число z

обладает тем свойством, что

$$\frac{1}{z - C_1} + \frac{1}{z - C_2} + \cdots + \frac{1}{z - C_n} = 0,$$

то точка плоскости, соответствующая z, лежит внутри этого n-угольника.

Реш **4**.

З-ча **5**. Два концентрических круга поделены на $2k$ равных секторов. Каждый сектор выкрашен в белый или черный цвет. Доказать, что если белых и черных секторов на каждом круге одинаковое количество, то можно сделать такой поворот, что по крайней мере на половине длины окружности будут соприкасаться разноцветные куски.

Реш **5**.

XXIII олимпиада (1960)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Указать все денежные суммы, выраженные целым числом рублей, которые могут быть представлены как четным, так и нечетным числом денежных билетов.

Реш **1**.

З-ча **2**. 3 равные окружности с центрами O_1, O_2, O_3 пересекаются в данной точке. A_1, A_2, A_3 — остальные точки пересечения. Доказать, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $A_1A_2A_3$ равны.

Реш **2**.

З-ча **3**. В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех 5 курсов. Любые 2 однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые два студента с разных курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало 1 задачу?

Реш **3**.

З-ча **4**. M и N — точки пересечения двух окружностей с центрами O_1 и O_2. Прямая O_1M пересекает 1-ю окружность в точке A_1, а 2-ю в точке A_2. Прямая O_2N пересекает 1-ю окружность в точке B_1, а 2-ю в точке B_2. Доказать, что прямые A_1B_1, A_2B_2 и MN пересекаются в одной точке.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать: число делителей n не превосходит $2\sqrt{n}$.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Доказать, что число, состоящее из трехсот единиц и некоторого количества нулей, не является точным квадратом.

Реш **1**.

З-ча **2**. В турнире каждый шахматист половину всех очков набрал во встречах с участниками, занявшими три последних места. Сколько всего человек принимало участие в турнире?

Реш **2**.

З-ча **3**. Через данную вершину A выпуклого четырехугольника $ABCD$ провести прямую, делящую его площадь пополам.

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны отрезки AB, CD и точка O. Конец отрезка называется «отмеченным», если прямая, проходящая через него и точку O, не пересекает другой отрезок. Сколько может быть отмеченных концов?

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что существует бесконечно много чисел, не представимых в виде $p + n^{2k}$, ни при каких простых p и целых n и k.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Доказать, что любая правильная дробь может быть представлена в виде (конечной) суммы обратных величин попарно различных целых чисел.

Реш **1**.

З-ча **2**. Существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $p + n^{2k}$ ни при каких простых p и натуральных n и k.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан выпуклый многоугольник и точка O внутри него. Любая прямая, проходящая через точку O, делит площадь многоугольника пополам. Доказать, что многоугольник центрально-симметричный и O — центр симметрии.

Реш **3**.

З-ча **4**. Найти геометрическое место четвертых вершин прямоугольников, у которых первая и вторая вершины лежат на данной окружности, а третья — в данной точке внутри окружности.

Реш **4**.

10 класс

З-ча **1**. Два правильных равных треугольника расположены в пространстве в параллельных плоскостях P_1 и P_2, причем отрезок, соединяющий их центры, перпендикулярен плоскостям. Найти геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков, соединяющих точки одного треугольника с точками другого треугольника.

Реш **1**.

З-ча **2**. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ делятся на n, то и сама дробь делится на n.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **4**. В десятичной записи целого числа A все цифры, кроме первой и последней, нули, первая и последняя — не нули, число цифр — не меньше трех. Доказать, что A не является точным квадратом.

Реш **4**.

З-ча **5**. Даны числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, причем для всех натуральных нечетных n имеет место равенство

$$\alpha_1^n + \alpha_2^n + \dots, \alpha_k^n = 0.$$

Доказать, что те из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots + \alpha_k$, которые не равны нулю, можно разбить на пары таким образом, чтобы два числа, входящие в одну и ту же пару, были бы равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Даны 4 точки: A, B, C, D. Найти такую точку O, что сумма расстояний от нее до данных точек минимальна.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что из сторон произвольного четырехугольника можно сложить трапецию.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что любой несамопересекающийся пятиугольник лежит по одну сторону от хотя бы одной своей стороны.

Реш **3**.

З-ча **4**. В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресением. Определить это число.

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. Каково наибольшее n, при котором так можно расположить n точек на плоскости, чтобы каждые 3 из них служили вершинами прямоугольного треугольника?

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется бесконечная шахматная доска. Обозначим через (a, b) поле, расположенное на пересечении горизонтали с номером a и вертикали с номером b. Фишка с поля (a, b) может сделать ход на любое из восьми полей: $(a \pm m, b \pm n)$, $(a \pm n, b \pm m)$, где m, n - фиксированные числа, а $(+)$ и $(-)$ комбинируются произвольно. Сделав x ходов, фишка вернулась на исходное поле. Доказать, что x четно.

Реш **2**.

З-ча **3**. a, b, c, d — длины сторон произвольного четырехугольника. Доказать, что можно построить трапецию со сторонами a, b, c, d.

Реш **3**.

З-ча **4**. Улитка ползет с непостоянной скоростью. Несколько человек наблюдало за ней по очереди в течение 6 мин. Каждый начинал наблюдать раньше, чем кончал предыдущий, и наблюдал ровно 1 мин. За эту минуту улитка проползла ровно 1 м. Доказать, что за все 6 мин. улитка могла проползти самое большое 10 м.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дан пятиугольник $ABCDE$. $AB = BC = CD = DE$, $\angle B = \angle D = 90°$. Доказать, что пятиугольниками, равными данному, можно замостить плоскость.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Имеется m точек, некоторые из которых соединены отрезками так, что каждая соединена с l точками. Какие значения может принимать l?

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан произвольный центрально-симметричный шестиугольник. На его сторонах, как на основаниях, построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Доказать, что середины отрезков, соединяющих вершины соседних треугольников, образуют правильный шестиугольник.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что никакую прямоугольную шахматную доску шириной в 4 клетки нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждом поле по одному разу и последним ходом вернувшись на исходную клетку.

Реш **3**.

З-ча **4**. Найти геометрическое место центров треугольников, описанных около данного остроугольного треугольника.

Реш **4**.

З-ча **5**. В квадрате со стороной 100 расположено N кругов радиуса 1, причем всякий отрезок длины 10, целиком расположенный внутри квадрата, пересекает хотя бы один круг. Доказать, что $N \geqslant 400$.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Число A делится на $1, 2, 3, \ldots, 9$. Доказать, что если $2A$ представлено в виде суммы натуральных чисел, меньших 10, $2A = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, то из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ можно выбрать часть, сумма которых равна A.

Реш **1**.

З-ча **2**. $6n$-значное число делится на 7. Последнюю цифру перенесли в начало. Доказать, что полученное число также делится на 7.

Реш **2**.

З-ча **3**. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. Доказать, что число ломаных длиной $2n$, стороны которых лежат на линиях клетчатой бумаги со стороной клетки 1, а вершины — в узлах сетки, равно $(C_{2n}^n)^2$.

Реш **5**.

XXIV олимпиада (1961)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что если n четное число, то числа $1, 2, 3 \dots, n^2$ можно таким образом расположить в квадратную таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел, стоящих в каждом столбце, были одинаковы.

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется трехзначное число abc, берем cba и вычтем из большого меньшее. Получим число $a_1b_1c_1$, сделаем с ним то же самое и т.д.

Доказать, что на каком-то шаге мы получим или число 495, или 0. (Здесь под abc понимается число, записываемое с помощью цифр a, b, c).

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан остроугольный треугольник $A_0B_0C_0$. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — центры квадратов, построенных на сторонах B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0. С треугольником $A_1B_1C_1$ делаем то же самое. Получаем треугольник $A_2B_2C_2$ и т.д. Доказать, что $\Delta A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ пересекает $\Delta A_nB_nC_n$ ровно в 6 точках.

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеется 100 точек на плоскости, причем расстояние между любыми двумя из них не превосходит 1, и если A, B, C — любые три точки из данных, то треугольник ABC — тупоугольный. Доказать, что можно провести такую окружность радиуса 1/2, что все данные точки лежат внутри нее или на ней самой.

Реш **4**.

З-ча **5**. На шахматной доске выбраны две клетки одинакового цвета. Доказать, что ладья, начиная с первой, может обойти все клетки по разу, а на второй выбранной клетке побывав два раза.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Дан треугольник ABC и точка O. M_1, M_2, M_3 — центры тяжести треугольников OAB, OBC, OCA соответственно. Доказать, что площадь треугольника $M_1M_2M_3$ равна 1/9 площади ABC.

Реш **1**.

З-ча **2**. Играют двое; один из них загадывает набор из целых чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — однозначных, как положительных, так и отрицательных. Второму разрешается спрашивать, чему равна сумма $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, где $(a_1 \dots a_n)$ любой набор. Каково наименьшее число вопросов, за которое отгадывающий узнает задуманный набор?

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. Доказать, что ладья может обойти все клетки прямоугольной шахматной доски, побывав на каждой клетке ровно один раз, и вернуться в начальную клетку, если только число клеток на доске четное.

Реш **4**.

З-ча **5**. Два отрезка натурального ряда из 1961 числа подписаны один под другим. Доказать, что каждый из них можно так переставить, чтоесли сложить числа, стоящие одно под другим, получится снова отрезок натурального ряда.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 8 класса.

З-ча **3**. Доказать, что можно расположить числа от 1 до n^2 в таблицу $n \times n$, чтобы суммы чисел каждого столбца были равны.

Реш **3**.

З-ча **4**. В автобусе без кондуктора едут $4k$ пассажиров. У каждого из них есть только монеты в 10, 15, 20 копеек. Доказать, что если общее число монет меньше $5k$, то пассажиры не смогут правильно расплатиться за проезд. Для числа монет $5k$ построить пример, когда возможен правильный расчет.

Реш **4**.

З-ча **5**. На плоскости дано N точек. Если A, B, C — любые три из них, то внутри треугольника ABC нет ни одной точки из данных. Доказать, что эти точки можно занумеровать так, что многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ будет выпуклым.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Дана последовательность чисел $U_1, U_2 \dots$; $U_1 = U_2 = 1$ и $U_{n+2} = U_n + U_{n+1}$. Доказать, что U_{5k} делится на 5 при $k = 1, 2, \dots$.

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости проведено несколько полос разной ширины. Никакие две из них не параллельны. Как нужно сдвинуть их параллельно самим себе, чтобы площадь их общей части была наибольшей?

Реш **2**.

З-ча **3**. k человек ехали в автобусе без кондуктора, и у всех них были монеты только достоинством в 10, 15, 20 копеек. Известно, что каждый уплатил за проезд и получил сдачу. Доказать, что наименьшее число монет, которое они могли иметь, равно $k + \left[\frac{k+3}{4}\right]$, где значок $[a]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее a.

Реш **3**.

З-ча **4**. Окружность S и точка O лежат в одной плоскости, причем O находится вне окружности. Построим произвольный шар, проходящий через окружность S, и опишем конус с вершиной в точке O и касающийся шара. Найти геометрическое место центров окружностей, по которым конусы касаются шаров.

Реш **4**.

З-ча **5**. Известно, что $Z + \dots + Z_n = O$, где Z_k — комплексные числа. Доказать, что среди этих чисел найдутся два таких, что разность их аргументов больше или равна 120°.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Стороны произвольного выпуклого многоугольника покрашены снаружи. Проводится несколько диагоналей многоугольника, так, что никакие три не пересекаются в одной точке. Каждая из этих диагоналей тоже покрашена с одной стороны, т.е. с одной стороны отрезка проведена узкая цветная полоска. Доказать, что хотя бы один из многоугольников, на которые разбит диагоналями исходный многоугольник, весь покрашен снаружи.

Реш **1**.

З-ча **2**. В квадрате $ABCD$ на стороне AB взята точка P, на стороне BC — точка Q, на стороне CD — точка R, на стороне DA — S; оказалось, что фигура $PQRS$ — прямоугольник. Доказать, что тогда прямоугольник $PQRS$ — либо квадрат, либо обладает тем свойством, что его стороны параллельны диагоналям квадрата.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что среди любых 39 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 11.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дана таблица 4 на 4 клетки, в некоторых клетках которой поставлено по звездочке. Показать, что можно так расставить семь звездочек, что при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов этой таблицы в оставшихся клетках всегда была бы хотя бы одна звездочка. Доказать, что если звездочек меньше, чем семь, то всегда можно так вычеркнуть две строки и два столбца, что все оставшиеся клетки будут пустыми.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что не существует целых чисел a, d, c, d, удовлетворяющих равенствам:

$$\begin{aligned} abcd - a &= 1961 \\ abcd - b &= 961 \\ abcd - c &= 61 \\ abcd - d &= 1 \end{aligned}$$

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Дана фигура, состоящая из 16 отрезков (рис. ???).

Доказать, что нельзя провести ломаную, пересекающую каждый из отрезков ровно один раз. Ломаная может быть незамкнутой и самопересекающейся, но ее вершины не должны лежать на отрезках, а стороны — проходить через вершины фигуры.

Реш **1**.

З-ча **2**. С центрами в вершинах прямоугольника построены четыре окружности с радиусами r_1, r_2, r_3, r_4, причем $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 < d$; d — диагональ прямоугольника. Проводятся две пары внешних касательных к окружностям $1, 3$ и $2, 4$. Доказать, что в четырехугольник, образованный этими четырьмя прямыми, можно вписать окружность.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

З-ча **5**. Дана четверка чисел a, b, c, d. Из нее получается новая ab, bc, cd, da по следующему правилу: каждое число умножается на следующее, четвертое — на первое. Из новой четверки по этому же правилу получается третья и т.д. Доказать, что в полученной последовательности четверок никогда не встретится двух одинаковых, кроме случая, когда $a = b = c = d = 1$.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями по окружностям O_1 и O_2 соответственно (по часовой стрелке). Доказать, что вершина C правильного треугольника ABC также движется равномерно по некоторой окружности.

Реш **1**.

З-ча **2**. В клетки таблицы $m \times n$ вписаны некоторые числа. Разрешается одновременно менять знак у всех чисел некоторого столбца или некоторой строки. Доказать, что многократным повторением этой операции можно превратить данную таблицу в такую, у которой суммы чисел, стоящих в любом столбце и любой строке, неотрицательны.

Реш **2**.

З-ча **3**. n точек соединены отрезками так, что каждая точка с чем-нибудь соединена и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Доказать, что общее число отрезков равно $n - 1$.

Реш **3**.

З-ча **4**. a, b, p — любые числа. Доказать, что найдутся взаимно простые k, l такие, что $ak + bl$ делится на p.

Реш **4**.

З-ча **5**. Коля и Петя делят $2n + 1$ орехов, $n \geqslant 2$, причем каждый хочет получать возможно больше. Предполагаются три этапа дележа (каждый проходит в три этапа).

1-й этап: Петя делит все орехи на две части, в каждой не меньше двух орехов.

2-й этап: Коля делит каждую часть снова на две, в каждой не меньше одного ореха.

1-й и 2-й этапы общие для всех трех способов.

3-й этап: При первом способе Коля берет большую и меньшую части;

При втором способе Коля берет обе средние части;

При третьем способе Коля берет либо большую и меньшую части, либо обе средние части, но за право выбора отдает Пете один орех.

Определить, какой способ самый выгодный для Коли и какой наименее выгоден для него.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Доказать, что для любых трех бесконечных последовательностей натуральных чисел

$$\begin{array}{lll} a_1 \ldots & a_n & \ldots \\ b_1 \ldots & b_n & \ldots \\ c_1 \ldots & c_n & \ldots \end{array}$$

найдутся такие номера p и q, что

$$a_p \geqslant a_q, b_p \geqslant b_q, c_p \geqslant c_q.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со стороной 1. Доказать, что в прямоугольник можно поместить круг радиуса 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **4**. Расстояние от фиксированной точки P плоскости до двух вершин A, B равностороннего треугольника ABC равны $AP = 2$; $BP = 3$. Определить, какое максимальное значение может иметь отрезок PC.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дан произвольный набор из $+1$ и -1 длиной 2^k. Из него получается новый по следующему правилу: каждое число умножается на следующее за ним; последнее 2^k-тое число умножается на первое. С новым набором из 1 и -1 проделывается то же самое и т.д.

Доказать, что в конце концов получается набор, состоящий из одних единиц.

Реш **5**.

XXV олимпиада (1962)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Дана прямая l, перпендикулярная отрезку AB и пересекающая его. Для любой точки M прямой l строится такая точка N, что $\angle NAB = 2\angle MAB$; $\angle NBA = 2\angle MBA$. Доказать, что абсолютная величина разности $AN - BN$ не зависит от выбора точки M на прямой l.

Реш **1**.

З-ча **2**. Правильный треугольник, одна сторона которого отмечена, отражается симметрично относительно одной из своих сторон. Полученный треугольник в свою очередь отражается и т.д., пока на некотором шаге треугольник не придёт в первоначальное положение. Доказать, что при этом отмеченная сторона также займёт исходное положение.

Реш **2**.

З-ча **3**. Пусть a, b, c, d — стороны четырёхугольника, не являющегося ромбом. Доказать, что из отрезков a, b, c, d можно сложить самопересекающийся четырёхугольник.

Реш **3**.

З-ча **4**. Сумму цифр числа a обозначим через $S(a)$. Доказать, что если $S(a) = S(2a)$, то число a делится на 9.

Реш **4**.

З-ча **5**. Даны n карточек; на обеих сторонах каждой карточки написано по одному из чисел $1, 2, \ldots, n$, причём так, что каждое число встречается на всех n карточках ровно два раза. Доказать, что карточки можно разложить на столе так, что сверху окажутся все числа: $1, 2, \ldots, n$.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. На сторонах AB, BC, CA правильного треугольника ABC найти такие точки X, Y, Z (соответственно), чтобы площадь треугольника, образованного прямыми CX, BZ, AY, была вчетверо меньше площади треугольника ABC и чтобы было выполнено условие:

$$\frac{AX}{XB} = \frac{BY}{YC} = \frac{CZ}{ZA}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

З-ча **3**. Доказать, что для любого целого d найдутся такие целые m, n, что

$$d = \frac{n - 2m + 1}{m^2 - n}.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 7 класса.

9 класс

З-ча **1**. Даны два пересекающихся отрезка AB и CD. На отрезках выбираются точки M и N (соответственно) так, что $AM = CN$. Найти положение точек M и N, при котором длина отрезка MN минимальна (ср. задачу 1 для 10 класса).

Реш **1**.

З-ча **2**. «Конём» называется фигура, ход которой состоит в перемещении на n клеток по горизонтали и на 1 по вертикали (или наоборот). Конь стоит на некотором поле бесконечной шахматной доски. При каких n он может попасть на любое заданное поле? При каких n это невозможно?

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 7 класса.

З-ча **4**. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{1962} &= 1,\\ x_1-x_2x_3\cdot\ldots\cdot x_{1962} &= 1,\\ x_1x_2-x_3x_4\cdot\ldots\cdot x_{1962} &= 1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\\ x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_{1961}-x_{1962} &= 1.\end{cases}$$

Какие значения может принимать x_{25}?

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что в прямоугольнике площади 1 можно расположить непересекающиеся круги так, чтобы сумма их радиусов была равна 1962.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В задаче 1 для 9 класса заменить отрезки пересекающимися лучами.

Реш **1**.

З-ча **2**. На сторонах квадрата, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники с острым углом при вершине.Доказать, что получившуюся фигуру нельзя разбить на параллелограммы.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных членов последовательности $1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ldots$.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 9 класса.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 7 класса.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. У края биллиарда, имеющего форму правильного $2n$-угольника, стоит шар. Как надо пустить шар от борта, чтобы он, отразившись от всех бортов, вернулся в ту же точку? (При отражении углы падения и отражения равны.) Доказать, что при этом длина пути шара не зависит от выбора начальной точки.

Реш **1**.

З-ча **2**. ABC — равнобедренный треугольник; $AB = BC$, BH — высота, M — середина стороны AB, K — точка пересечения BH с окружностью, проходящей через B, M и C. Доказать, что $BK = \frac{3}{2}R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Реш **2**.

З-ча **3**. «Уголком» называется фигура, составленная из трёх квадратов со стороной 1 в виде буквы «Г». Доказать, что прямоугольник размерами 1961×1963 нельзя разбить на уголки, а прямоугольник размерами 1963×1965 — можно.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дано число $100\ldots01$; число нулей в нём равно 1961. Докажите, что это число — составное.

Реш **4**.

З-ча **5**. На плоскости даны 25 точек; известно, что из любых трёх точек можно выбрать две, расстояние между которыми меньше 1. Доказать, что среди данных точек найдутся 13, лежащие в круге радиуса 1.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

Реш **1**.

З-ча **2**. Как надо расположить числа $1, 2, \dots, 1962$ в последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{1962}$, чтобы сумма:

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{1961} - a_{1962}| + |a_{1962} - a_1|$$

была наибольшей?

Реш **2**.

З-ча **3**. В окружность вписан неправильный n-угольник, который при повороте окружности около центра на некоторый угол $\alpha \neq 2\pi$ совмещается сам с собой. Доказать, что n — число составное.

Реш **3**.

З-ча **4**. Из чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 можно образовать десять попарных сумм; обозначим их через $a_1, a_2, \dots, a_{10}$. Доказать, что зная числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ (но не зная, разумеется, суммой каких именно двух чисел является каждое из них), можно восстановить числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Реш **4**.

З-ча **5**. Две окружности O_1 и O_2 пересекаются в точках M и P. Обозначим через MA хорду окружности O_1, касающуюся окружности O_2 в точке M, а через MB — хорду окружности O_2, касающуюся окружности O_1 в точке M. На прямой MP отложен отрезок $PH = MP$. Доказать, что четырёхугольник $MAHB$ можно вписать в окружность.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Школьник в течение учебного года должен решать ровно по 25 задач за каждые идущие подряд 7 дней. Время, необходимое на решение одной задачи (любой), не меняется в течение дня, но меняется в течение учебного года по известному школьному закону и всегда меньше 45 минут. Школьник хочет затратить на решение задач в общей сложности наименьшее время. Доказать, что для этого он может выбрать некоторый день недели и в этот день (каждую неделю) решать по 25 задач.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 8 класса, где вместо чисел $1, 2, \dots, 1962$ взяты 25 произвольных различных чисел.

Реш **2**.

З-ча **3**. Стороны выпуклого многоугольника, периметр которого равен 12, отодвигаются на расстояние $d = 1$ во внешнюю сторону. Доказать, что площадь многоугольника увеличится по крайней мере на 15.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 8 класса.

З-ча **5**. Даны 2^n конечных последовательностей из нулей и единиц, причём ни одна из них не является началом никакой другой. Доказать, что сумма длин этих последовательностей не меньше $n \cdot 2^n$.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. На данной прямой l, проходящей через центр O данной окружности, фиксирована точка C. Точки A и A' расположены на окружности по одну сторону от l так, что углы, образованные прямыми AC и $A'C$ с прямой l равны. Обозначим через B точку пересечения прямых AA' и l. Доказать, что положение точки B не зависит от точки A.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **4**. Как надо расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

Реш **4**.

З-ча **5**. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Доказать, что участников можно так занумеровать, что окажется, что ни один участник не проиграл непосредственно за ним следующему.

Реш **5**.

XXVI олимпиада (1963)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Из вершины B произвольного треугольника ABC проведены вне треугольника прямые BM и BN, так что $\angle ABM = \angle CBN$. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямых BM и BN (соответственно). Доказать, что $AC' = A'C$.

Реш **1**.

З-ча **2**. a, b, c — такие три числа, что $a+b+c = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение $ab + ac + bc \leqslant 0$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Имеется 200 карточек размером 1×2, на каждой из которых написаны числа $+1$ и -1 (см. рис. ???). Можно ли так заполнить этими карточками лист клетчатой бумаги размером 4×100, чтобы произведения чисел в каждом столбце и каждой строке образовавшейся таблицы были положительны? (Карточка занимает целиком две соседние клетки.)(Ср. с задачей 5 для 8 класса).

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 8 класса.

З-ча **5**. Можно ли так провести прямую по листу клетчатой бумаги размером 20×30, чтобы она пересекла 50 клеток?

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такие числа, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение:

$$S = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n \leqslant 0;$$

в сумму S входят все возможные произведения a_ia_j, $i \neq j$ (ср. с задачей 2 для 7 класса).

Реш **1**.

З-ча **2**. Даны выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S и точка M внутри него. Точки P, Q, R, S симметричны точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$. Найти площадь четырехугольника $PQRS$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Решить в целых числах уравнение

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. На плоскости даны 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26°.

Реш **4**.

З-ча **5**. Лист клетчатой бумаги размером $5 \times n$ заполнен карточками размером 1×2 так, что каждая карточка занимает целиком две соседние клетки. На каждой карточке написаны числа $+1$ и -1 (рис. ???). Известно, что произведения чисел по строкам и столбцам образовавшейся таблицы положительны. При каких n это возможно?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Первый член и разность арифметической прогрессии — целые числа. Доказать, что найдется такой член прогрессии, в записи которого участвует цифра 9.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 5 для 8 класса.

З-ча **3**. a, b, c — любые положительные числа. Доказать, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. Из любых четырех точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 45°. Доказать. (Ср. с задачей 2 для 10 класса.)

Реш **4**.

З-ча **5**. Можно ли в прямоугольник с отношением сторон $9 : 16$ вписать прямоугольник с отношением сторон $4 : 7$ (так, чтобы на каждой стороне первого прямоугольника лежала вершина второго)?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса.

З-ча **2**. Из любых шести точек на плоскости (из которых никакие три не лежат на одной прямой) можно так выбрать три, что треугольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы один угол, не больший 30°. Доказать.

Реш **2**.

З-ча **3**. Какое наибольшее число клеток может пересечь прямая, проведенная на листе клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток?

Реш **3**.

З-ча **4**. a, b, c — такие три числа, что $abc > 0$ и $a+b+c > 0$. Доказать, что $a^n + b^n + c^n > 0$ при любом натуральном n.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дан произвольный треугольник ABC. Найти множество всех таких точек M, что перпендикуляры к прямым AM, BM, CM, проведенные из точек A, B, C (соответственно), пересекаются в одной точке.

Реш **5**.

11 класс

З-ча **1**. Положительные числа x, y, z обладают тем свойством, что

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доказать, что сумма этих чисел больше их произведения.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дана система из 25 различных отрезков с общим началом в данной точке A и с концами на прямой l, не проходящей через эту точку. Доказать, что не существует замкнутой 25-звенной ломаной, для каждого звена которой нашелся бы отрезок системы, равный и параллельный этому звену.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 5 для 10 класса.

З-ча **4**. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные семизначные числа, в записи которых каждая из этих цифр встречается ровно один раз. Доказать, что сумма всех таких чисел делится на 9.

Реш **4**.

З-ча **5**. Каждое ребро правильного тетраэдра разделено на три равные части. Через каждую полученную точку деления проведены две плоскости, параллельные соответственно двум граням тетраэдра, не проходящим через эту точку. На сколько частей построенные плоскости разбивают тетраэдр?

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Завод выпускает погремушки в виде кольца с надетыми на него 3 красными и 7 синими шариками. Сколько различных погремушек может быть выпущено? (Две погремушки считаются одинаковыми, если одна из них может быть получена из другой только передвижением шариков по кольцу и переворачиванием.)

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **3**. Дан произвольный треугольник ABC и проведена такая прямая, пересекающая треугольник, что расстояние от нее до точки A равно сумме расстояний до этой прямой от точек B и C. Доказать, что все такие прямые проходят через одну точку.

Реш **3**.

З-ча **4**. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $1, 2, \ldots, 1963$, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 26?

Реш **4**.

З-ча **5**. Система точек, соединенных отрезками, называется «связной», если из любой точки можно пройти в любую другую по этим отрезкам. Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные положительные числа. Обозначим через b_k количество чисел из набора $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию: $a_i \geqslant k$. Доказать, что

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. В таблицу 8×8 вписаны все целые числа от 1 до 64. Доказать, что при этом найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 5. (Соседними называются числа, стоящие в клетках, имеющих общую сторону.)

Реш **2**.

З-ча **3**. Найти множество центров тяжести всех остроугольных треугольников, вписанных в данную окружность.

Реш **3**.

З-ча **4**. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора $1, 2, \ldots, 1963$, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

Реш **4**.

З-ча **5**. По аллее длиной 100 метров идут три человека со скоростями 1, 2 и 3 км/час. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идет назад с той же скоростью. Доказать, что найдется отрезок времени в 1 минуту, когда все трое будут идти в одном направлении.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Дан произвольный треугольник ABC и точка X вне его. AM, BN, CQ — медианы треугольника ABC. Доказать, что площадь одного из треугольников XAM, XBN, XCQ равна сумме площадей двух других.

Реш **1**.

З-ча **2**. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь замкнутая 14-звенная ломаная, проходящая по линиям клетчатой бумаги так, что ни на какой линии не лежит более одного звена ломаной?

Реш **2**.

З-ча **3**. В правильном 10-угольнике проведены все диагонали. Сколько попарно неподобных треугольников может при этом образоваться?

Реш **3**.

З-ча **4**. В таблицу 9×9 вписаны все целые числа от 1 до 81. Доказать, что найдутся два соседних числа, разность между которыми не меньше 6. (Ср. с задачей 2 для 8 класса.)

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 8 класса.

10 класс

З-ча **1**. Доказать, что при нечетном n уравнение $x^n + y^n = z^n$ не может иметь решений в целых числах, если $(x+y)$ — простое число.

Реш **1**.

З-ча **2**. На листе бумаги нанесена сетка из n горизонтальных и n вертикальных прямых. Сколько различных $2n$-звенных ломаных можно провести по линиям сетки, так чтобы каждая ломаная проходила по всем горизонтальным и всем вертикальным прямым?

Реш **2**.

З-ча **3**. Из центра правильного 25-угольника проведены векторы во все его вершины. Как надо выбрать несколько векторов из этих 25, чтобы их сумма имела наибольшую длину?

Реш **3**.

З-ча **4**. A', B', C', D', E' — середины сторон выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Доказать, что площади пятиугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ связаны соотношением:

$$S_{A'B'C'D'E'} \geqslant \frac{1}{2} S_{ABCDE}.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ образуется следующим образом:

$$a_1 = a_2 = 1;\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}} \qquad (n \geqslant 3)$$

Доказать, что все числа в последовательности — целые.

Реш **5**.

11 класс

З-ча **1**. Доказать, что не существует попарно различных натуральных чисел x, y, z, t, для которых было бы справедливо соотношение

$$x^x + y^y = z^z + t^t.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что из одиннадцати произвольных бесконечных десятичных дробей можно выбрать две дроби, разность которых имеет в десятичной записи либо бесконечное число нулей, либо бесконечное число девяток.

Реш **2**.

З-ча **3**. Найти все многочлены $P(x)$, для которых справедливо тождество:

$$x \cdot P(x-1) \equiv (x-26) \cdot P(x).$$

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 10 класса.

З-ча **5**. Доказать, что на сфере нельзя так расположить три дуги в 300° каждая, чтобы никакие две из них не имели ни общих точек, ни общих концов.

Реш **5**.

XXVII олимпиада (1964)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC, не меньше этих сторон соответственно. Найти углы треугольника.

Реш **1**.

З-ча **2**. На данной окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и третья точка C. Касательная, проведенная к окружности в точке A, и прямая BC пересекаются в точке M.

Доказать, что касательная, проведенная к окружности в точке C, делит пополам отрезок AM.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что сумма цифр числа, являющегося точным квадратом, не может равняться пяти.

Реш **3**.

З-ча **4**. На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются «узлами», «звеном» мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилось не более трех звеньев?

Реш **4**.

З-ча **5**. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ образована по закону: $a_0 = a_1 = 1; a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} + 1$.

Доказать, что число a_{1964} не делится на 4.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 7 класса.

З-ча **2**. Найти все такие натуральные числа n, что число $(n-1)!$ не делится на n^2.

Реш **2**.

З-ча **3**. Решить в целых числах уравнение:

$$\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots\sqrt{n}}}}_{1964\text{ раза}} = m.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. В шестиугольнике $ABCDEFG$ все углы равны. Доказать, что длины сторон такого шестиугольника удовлетворяют соотношениям: $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Рассмотрим суммы цифр всех чисел от 1 до 1 000 000 включительно. У полученных чисел вновь рассмотрим сумму цифр и так далее, пока не получим миллион однозначных чисел. Каких чисел больше среди них — единиц или двоек?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Решить в положительных числах систему:

$$\begin{array}{rcl} x^y & = & z \\ y^z & = & x \\ z^x & = & y \end{array}$$

Реш **1**.

З-ча **2**.

Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

Реш **2**.

З-ча **3**. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^3$ делится без остатка на $27 - K$. Найти a.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 8 класса. Кроме того, доказать, что если длины отрезков $a_1, \ldots, a_6$ удовлетворяют соотношениям: $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$, то из этих отрезков можно построить равноугольный шестиугольник.

Реш **4**.

З-ча **5**. В четырехугольнике $ABCD$ из вершин A и C проведены перпендикуляры на диагональ BD, а из вершин B и D проведены перпендикуляры на диагональ AC. Доказать, что четырехугольники $ABCD$ и $MNPQ$ подобны. M, N, P, Q — основания перпендикуляров.

Реш **5**.

10-11 классы

З-ча **1**. Число N является точным квадратом и не заканчивается нулем. После зачеркивания у этого числа двух последних цифр снова получится точный квадрат. Найти наибольшее число N с таким свойством.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 8 класса.

З-ча **3**. Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a - K^{1964}$ делится без остатка на $27 - K$. Найти a (ср. задачу 3 для 9 класса).

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 8 класса.

З-ча **5**. На какое наименьшее число непересекающихся тетраэдров можно разбить куб?

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. На отрезке AB выбрана произвольно точка C и на отрезках AB, AC и BC, как на диаметрах, построены окружности O_1, O_2 и O_3. Через точку C проводится произвольная прямая, пересекающая окружность O_1 в точках P и Q, а окружности O_2 и O_3 в точках R и S соответственно. Доказать, что $PR = QS$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Собрались $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n присутствующими. Доказать, что можно выбрать из них четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми ($n \geqslant 2$).

Реш **2**.

З-ча **3**. В квадрате со стороной длины 1 выбрано 102 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого меньше, чем 1/100.

Реш **3**.

З-ча **4**. Через противоположные вершины A и C четырехугольника $ABCD$ проведена окружность, пересекающая стороны AB, BC, CD и AD соответственно в точках M, N, P и Q. Известно, что $BM = BN = DP = OQ$, где R — радиус окружности.

Доказать, что в таком случае сумма углов B и D данного четырехугольника равна $120°$.

Реш **4**.

З-ча **5**. При каких натуральных a существуют такие натуральные числа x и y, что $(x+y)^2+3x+y = 2a$?

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. В n стаканах достаточно большой вместительности налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно в конечное число шагов слить воду в один стакан?

Реш **1**.

З-ча **2**. Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка O вне этой прямой. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры окружностей, описанных около треугольников OAB, OAC, OBC. Доказать, что точки O_1, O_2, O_3 лежат на одной окружности.

Реш **2**.

З-ча **3**. На квадратном поле размерами 99×99, разграфленном на клетки размерами 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока, и т.д. Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик на любую угловую клетку. Доказать, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

Реш **3**.

З-ча **4**. Внутри равностороннего (не обязательно правильного) семиугольника $A_1A_2\ldots A_7$ взята произвольно точка O. Обозначим через $H_1, H_2, \ldots, H_7$ основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_7A_1$ соответственно. Известно, что точки $H_1, H_2, \ldots, H_7$ лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях. Доказать, что $A_1H_1 + A_2H_2 + \cdots + A_7H_7 = H_1A_2 + H_2A_3 + \cdots + H_7A_1$.

Реш **4**.

З-ча **5**. В квадрате со стороной 1 взята произвольно 101 точка, не обязательно лежащие внутри квадрата. Доказать, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше $1/60$.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 4 для 8 класса.

З-ча **2**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **3**. Доказать, что любое четное число $2n \geqslant 0$ может быть единственным образом представлено в виде $2n = (x+y)^2 + 3x + y$, где x и y — целые неотрицательные числа.

Реш **3**.

З-ча **4**. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что биссектриса угла A перпендикулярна отрезку, соединяющему центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

Реш **4**.

З-ча **5**. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Доказать, что число звеньев такой ломаной четно.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, т.е. сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $\frac{1}{n}$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой.

Примечание. Мензурка позволяет отмерять любой объем жидкости.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дана система из n точек на плоскости, причем известно, что для любых двух точек данной системы можно указать движение плоскости, при котором первая точка перейдет во вторую, а система перейдет сама в себя. Доказать, что все точки такой системы лежат на одной окружности.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан треугольник ABC, причем сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что в таком треугольнике вершина A, середины сторон AB и AC и центры вписанной и описанной окружностей лежат на одной окружности (ср. задачу 4 для 9 класса).

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **5**. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

Реш **5**.

11 класс

З-ча **1**. Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, быть может, один вектор), длина суммы которых больше 1.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **3**. В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Через точку A и середины сторон AB и AC проведена окружность и к ней из центра тяжести треугольника проведены касательные. Доказать, что одна из точек касания является центром вписанной окружности треугольника ABC.

Реш **3**.

З-ча **4**. Пирог имеет форму правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середин сторон проведены прямолинейные надрезы длины 1. Доказать, что при этом от пирога будет отрезан какой-нибудь кусок.

Реш **4**.

З-ча **5**. При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

Реш **5**.

XXVIII олимпиада (1965)

Второй тур

8 класс

З-ча **1**. Даны окружность O, прямая a, пересекающая ее, и точка M. Через точку M провести секущую b так, чтобы ее часть, заключенная внутри окружности O, делилась пополам в точке ее пересечения с прямой a.

Реш **1**.

З-ча **2**. Докажите следующий признак делимости на 37. Для того, чтобы узнать, делится ли число на 37, надо разбить его на грани справа налево по три цифры в каждой грани. Если сумма полученных трехзначных чисел делится на 37, то и данное число делится на 37. (Слово «трехзначные»употреблено условно: некоторые из граней могут начинаться с нулей и быть на самом деле двухзначными или меньше; не трехзначной будет и самая левая грань, если количество цифр нашего числа не делится на 3.)

Реш **2**.

З-ча **3**. Дана прямая a и два непараллельных отрезка AB и CD по одну сторону от нее. Найти на прямой a такую точку M, чтобы треугольники ABM и CDM были равновелики.

Реш **3**.

З-ча **4**. 30 команд участвуют в розыгрыше первенства по футболу. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Реш **4**.

9 класс

З-ча **1**. Шестизначное число делится на 37. Все его цифры различны. Доказать, что из тех же цифр можно составить и другое шестизначное число, тоже делящееся на 37.

Реш **1**.

З-ча **2**. Внутри данного треугольника ABC найти такую точку O, чтобы площади треугольников AOB, BOC, COA относились как $1 : 2 : 3$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан треугольник ABC, в котором сторона AB больше BC. Проведены биссектрисы AK и CM (K лежит на BC, M лежит на AB). Доказать, что отрезок AM больше MK, а отрезок MK больше KC.

Реш **3**.

З-ча **4**. В стране Иллирии некоторые пары городов связаны прямым воздушным сообщением. Докажите, что там есть два города, связанные с равным количеством других городов.

Реш **4**.

З-ча **5**. Вдоль коридора положено несколько кусков ковровой дорожки. Куски покрывают весь коридор из конца в конец без пропусков и даже налегают друг на друга, так что над некоторыми местами пола они лежат в несколько слоев. Доказать, что можно убрать несколько кусков, возможно, достав их из-под других и оставив остальные в точности на тех же местах, где они лежали прежде, так что коридор по-прежнему будет полностью покрыт, и общая длина оставленных кусков будет меньше удвоенной длины коридора.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**.

Окружности O_1 и O_2 лежат внутри треугольника и касаются друг друга извне, причем окружность O_1 касается двух сторон треугольника, а окружность O_2 — тоже касается двух сторон треугольника, но не тех же, что O_1. Доказать, что сумма радиусов этих окружностей больше радиуса окружности, вписанной в треугольник.

Реш **1**.

З-ча **2**. Шестизначное число делится на 37 и имеет хотя бы две различные цифры. Его первая и четвертая цифры — не нули. Докажите, что, переставив цифры в данном числе, можно получить другое число, тоже делящееся на 37 и не начинающееся с нуля.

Реш **2**.

З-ча **3**. Концы отрезка постоянной длины скользят по сторонам данного угла. Из середины этого отрезка к нему восстановлен перпендикуляр. Докажите, что отрезок перпендикуляра от его основания до точки пересечения с биссектрисой угла имеет постоянную длину.

Реш **3**.

З-ча **4**. X — число, большее двух. Некто пишет на карточках числа: $1, X, X^2, X^3, X^4, \ldots, X^k$ (каждое число только на одной карточке). Потом часть карточек он кладет себе в правый карман, часть в левый, остальные выбрасывает. Докажите, что сумма чисел в правом кармане не может быть равна сумме чисел в левом.

Реш **4**.

З-ча **5**. Бумажный квадрат был проколот в 1965 точках. Из точек-проколов и вершин квадрата никакие три не лежат на одной прямой. Потом сделали несколько прямолинейных не пересекающихся между собой разрезов, каждый из которых начинался и кончался только в проколотых точках или вершинах квадрата. Оказалось, что квадрат разрезан на треугольники, внутри которых проколов нет. Сколько было сделано разрезов и сколько получилось треугольников?

Реш **5**.

11 класс

З-ча **1**. Все коэффициенты многочлена равны единице, нулю или минус единице. Докажите, что все его действительные корни (если они существуют) заключены в отрезке от минус двух до плюс двух.

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости даны три точки. Построить три окружности, касающиеся друг друга в этих точках. Разобрать все случаи.

Реш **2**.

З-ча **3**. В квадратном уравнении x^2+px+c коэффициенты p, c независимо пробегают все значения от минус единицы до плюс единицы включительно. Найти множество значений, которые при этом принимает действительный корень данного уравнения.

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны окружность O, точка A, лежащая на ней, перпендикуляр к плоскости окружности O, восставленный из точки A, и точка B, лежащая на этом перпендикуляре. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые, проходящие через точку B и произвольную точку окружности O.

Реш **4**.

З-ча **5**. Даны двадцать карточек. Каждая из цифр от нуля до девяти включительно написана на двух из этих карточек (на каждой карточке — только одна цифра). Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две, и так далее до девяток, между которыми должно быть девять карточек?

Реш **5**.

Третий тур

8 класс

З-ча **1**. Дана последовательность $\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ бесконечная в обе стороны, причем каждый ее член равен $\frac{1}{4}$ суммы двух соседних. Доказать, что если какие-то два ее члена равны, то в ней есть бесконечное число пар равных между собой чисел. (Пояснение: два члена, про которые известно, что они равны, не обязательно соседние).

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан прямоугольный биллиард размером 26×1965. Из нижней левой лузы под углом 45° к бортам выпускается шар. Доказать, что после нескольких отражений от бортов он упадет в верхнюю левую лузу. (Угол падения равен углу отражения).

Реш **2**.

З-ча **3**. Два неравных картонных диска разделены на 1965 равных секторов. На каждом из дисков произвольно выбраны 200 секторов и раскрашены в красный цвет. Меньший диск наложен на больший, так что их центры совпадают, а секторы целиком лежат один против другого. Меньший диск поворачивают на всевозможные углы, кратные $\frac{1}{1965}$ части окружности, оставляя больший диск неподвижным. Доказать, что по крайней мере при 60 положениях на дисках совпадут не более 20 красных секторов.

Реш **3**.

З-ча **4**. Посередине между двумя параллельными улицами стоят в один ряд одинаковые дома со стороной, равной a. Расстояние между улицами — $3a$, а расстояние между двумя соседними домами — $2a$. Одна улица патрулируется полицейскими, которые движутся на расстоянии $9a$ друг от друга со скоростью v. К тому времени, как первый полицейский проходит мимо середины некоторого дома, точно напротив него на другой улице появляется гангстер. С какой постоянной скоростью и в какую сторону должен двигаться по этой улице гангстер, чтобы ни один полицейский его не заметил?

Реш **4**.

9 класс

З-ча **1**. Имеется 11 мешков монет. В 10 из них монеты настоящие, а в одном — все монеты фальшивые. Все настоящие монеты одного веса, все фальшивые монеты — также одного, но другого веса. Имеются весы, с помощью которых можно определить, какой из двух грузов тяжелее и на сколько. Двумя взвешиваниями определить, в каком мешке фальшивые монеты.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан биллиард прямоугольной формы. В его углах имеются лузы, попадая в которые шарик останавливается. Шарик выпускают из одного угла бильярда под углом 45° к стороне. В какой-то момент он попал в середину некоторой стороны. Доказать, что в середине противоположной стороны он побывать не мог.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **4**. См. задачу 2 для 10 класса.

З-ча **5**. Найти геометрическое место центров равносторонних треугольников, описанных около данного произвольного треугольника.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Имеется 11 мешков с монетами и весы с двумя чашками и стрелкой, которые показывают, на какой чашке груз тяжелее и на сколько именно. Известно, что в одном мешке все монеты фальшивые, а в остальных — все монеты настоящие. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а все фальшивые — также одинаковый, но другой вес. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить, в каком мешке лежат фальшивые монеты?

Реш **1**.

З-ча **2**. На лист клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток кладутся черные и белые кубики, причем каждый кубик занимает ровно одну клетку. Первый слой кубиков положили произвольно, а затем вспомнили, что каждый черный кубик должен граничить с четным числом белых, а каждый белый — с нечетным числом черных. Кубики во второй слой положили так, чтобы для всех кубиков первого слоя выполнялось это условие. Если для всех кубиков второго слоя это условие уже выполняется, то больше кубиков не кладут, если же нет, то кладут третий слой так, чтобы чтобы для всех кубиков второго слоя выполнялось это условие, и так далее. Существует ли такое расположение кубиков первого слоя, что этот процесс никогда не кончится?

Реш **2**.

З-ча **3**. В прямоугольном биллиарде размером $p \times 2q$, где p и q — целые нечетные числа, сделаны лузы в каждом углу и в середине каждой стороны длиной $2q$. Из угла выпущен шарик под углом 45° к стороне. Доказать, что шарик обязательно попадет в одну из средних луз.

Реш **3**.

З-ча **4**. Все целые числа от 1 до $2n$ выписаны в строчку. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Доказать, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на $2n$ одинаковый остаток.

Реш **4**.

З-ча **5**. В ящике лежат два ящика поменьше, в каждом из них еще по два ящика и т.д. n раз. В каждом из 2^n маленьких ящиков лежит по монете, причем одни вверх гербом, а остальные — вверх решкой. За один ход разрешается переворачивать один любой ящик вместе со всем, что в нем лежит. Доказать, что не больше, чем за n ходов можно расположить ящики так, что число монет, лежащих вверх гербом, будет равно числу монет, лежащих вверх решкой.

Реш **5**.

11 класс

З-ча **1**. Найдите все простые числа вида $P^P + 1$ (P — натуральное), содержащие не более 19 цифр.

Реш **1**.

З-ча **2**. Докажите, что последние цифры чисел n^n (n — натуральное) образуют периодическую последовательность.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дана плоскость P и две точки по разные стороны от нее. Построить сферу, проходящую через эти точки, высекающую из P наименьший круг.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дан многоугольник на плоскости, невыпуклый и несамопересекающийся. Д — множество точек, принадлежащих тем диагоналям многоугольника, которые не вылезают за его пределы (то есть лежат либо целиком внутри, либо частью внутри, частью на контуре). Концы этих диагоналей тоже включаются в Д. Докажите, что любые две точки из Д можно соединить ломаной, целиком принадлежащей Д.

Реш **4**.

З-ча **5**. В каждой клетке квадратной таблицы $M \times M$ клеток стоит либо натуральное число, либо ноль. При этом, если на пересечении строки и столбца стоит ноль, то сумма чисел в этой строке и этом столбце не меньше M. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше, чем $\frac{M^2}{2}$.

Реш **5**.

XXIX олимпиада (1966)

Второй тур

8 класс

З-ча **1**. Найти геометрическое место центров вписанных в треугольник ABC прямоугольников (одна сторона прямоугольника лежит на AB).

Реш **1**.

З-ча **2**. Найти все двузначные числа такие, что при умножении на некоторое целое число получается число, предпоследняя цифра которого — 5.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 1 для $9-11$ классов.

З-ча **4**. См. задачу 5 для $9-11$ классов.

З-ча **5**. Из 28 костей домино убрали все кости с шестерками. Можно ли остальные выложить в цепь?

Реш **5**.

9-11 классы

З-ча **1**. Решить в целых положительных числах систему

$$\begin{array}{rcl} x+y & = & zt \\ z+t & = & xy \end{array}$$

Реш **1**.

З-ча **2**. При каком значении K величина $A_k = \frac{19^k+66^k}{k!}$ максимальна?

Реш **2**.

З-ча **3**. Внутри окружности расположен выпуклый пятиугольник (вершины могут лежать как внутри, так и на окружности). Доказать, что хотя бы одна из его сторон не больше стороны правильного пятиугольника, вписанного в эту окружность.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что те натуральные K, для которых K^K+1 делится на 30, образуют арифметическую прогрессию. Найти ее.

Реш **4**.

З-ча **5**. Какое максимальное число дамок можно поставить на черных полях шахматной доски размером 8×8 так, чтобы каждую дамку била хотя бы одна из остальных? Доказать, что больше нельзя.

Реш **5**.

Третий тур

8 класс

З-ча **1**. Разделить циркулем и линейкой отрезок на 6 равных частей, проведя не более 8 линий (прямых, окружностей).

Реш **1**.

З-ча **2**. Дано:

$$a_1 = 1, a_k = \left[\sqrt{a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}}\right].$$

Найти a_{1000}. Примечание: $[A]$ — целая часть A.

Реш **2**.

З-ча **3**. Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Доказать, что за 8 проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

Реш **3**.

З-ча **4**. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций, из них не более трех пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не скрещиваются более двух линий. Какое наибольшее число линий может иметь такая сеть, если с любой станции на любую можно попасть, сделав не больше двух пересадок?

Реш **4**.

9-11 классы

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

З-ча **2**. Дано:

$$a_1 = 1966, a_k = \left[\sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}}\right].$$

Найти a_{1966}.

Реш **2**.

З-ча **3**. Из 11 шаров два радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Доказать, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров.

Реш **3**.

З-ча **4**. Из набора гирь весом $1, 2 \dots 26$ выделить шесть гирь так, чтобы из них нельзя было выбрать две кучки равного веса. Доказать, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

Реш **4**.

З-ча **5**. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

Реш **5**.

XXX олимпиада (1967)

Второй тур

8 класс

З-ча **1**. Существуют ли два последовательных натуральных числа таких, что сумма цифр каждого из них делится на 125? Найти наименьшую пару таких чисел, или доказать, что их не существует.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан треугольник ABC. Найти на прямой AB точку M такую, чтобы сумма радиусов окружностей, описанных вокруг треугольников ACM и BCM, была минимальна.

Реш **2**.

З-ча **3**. Для зашифровки телеграфных сообщений требуется разбить всевозможные десятизначные «слова» — наборы из десяти точек и тире — на две группы так, чтобы любые два слова одной группы отличались не менее чем в трех разрядах. Указать способ такого разбиения или доказать, что его не существует.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дан треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M таких, что треугольники ABM и BCM — равнобедренные.

Реш **4**.

З-ча **5**. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причем Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Имеется лабиринт, состоящий из n окружностей, касающихся прямой AB в точке M. Все окружности расположены по одну сторону от прямой, а их длины составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Два человека в разное время начали ходить по этому лабиринту. Их скорости одинаковы, а направления движения различны. Каждый из них проходит все окружности по порядку, и, пройдя наибольшую, снова идет в меньшую. Доказать, что они встретятся.

Реш **1**.

З-ча **2**. Можно ли разрезать квадратный пирог на 9 равновеликих частей таким способом: выбрать внутри квадрата две точки и соединить каждую из них прямолинейными разрезами со всеми четырьмя вершинами квадрата. Если можно, то какие две точки нужно выбрать?

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 2 для 8 класса.

З-ча **4**. Чему равна максимальная разность между соседними числами из числа тех, сумма цифр которых делится на 7?

Реш **4**.

З-ча **5**. Имеется 120-значное число. Его первые 12 цифр переставляются всеми возможными способами. Из полученных таким образом 120-значных чисел наугад выбирают 120 чисел. Доказать, что их сумма делится на 120.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В квадрате расположено K точек ($K > 2$). На какое наименьшее число треугольников нужно разбить квадрат, чтобы в каждом треугольнике находилось не более одной точки?

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что в круге радиуса 1 нельзя найти более 5 точек, попарные расстояния между которыми все больше 1.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$ не имеет решений в целых числах.

Реш **3**.

З-ча **4**. В бесконечно большой каравай, занимающий все пространство, в точках с целыми координатами впечены изюминки диаметра $0,1$. Каравай разрезали на части несколькими плоскостями. Доказать, что найдется неразрезанная изюминка.

Реш **4**.

З-ча **5**. Из первых k простых чисел $2,3,5\dots p_k$ $(k>4)$ составлены всевозможные произведения, в которые каждое из чисел входит не более одного раза (например, $3\cdot 5, 3\cdot 7\cdot\ldots\cdot p_k, 11$ и т.д.). Обозначим сумму всех таких чисел через S. Доказать, что $S+1$ разлагается в произведение более $2k$ простых сомножителей.

Реш **5**.

Третий тур

7 класс

З-ча **1**. В треугольнике ABC проведены высоты AE, BM и CP. Известно, что EM параллельна AB и EP параллельна AC. Докажите, что MP параллельна BC.

Реш **1**.

З-ча **2**. Над квадратным катком нужно повесить четыре лампы так, чтобы они его полностью освещали. На какой наименьшей высоте нужно повесить лампы, если каждая лампа освещает круг радиуса, равного высоте, на которой она висит?

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что существует число q такое, что в десятичной записи числа $q\cdot 2^{1000}$ нет ни одного нуля.

Реш **3**.

З-ча **4**. Число y получается из натурального числа x некоторой перестановкой его цифр. Докажите, что каково бы ни было x, $x+y\neq 9999\ldots 99$ (1967 девяток).

Реш **4**.

З-ча **5**. В четырех заданных точках на плоскости расположены прожекторы, каждый из которых может освещать прямой угол. Стороны этих углов могут быть направлены на север, юг, запад или восток. Доказать, что эти прожекторы можно направить так, что они осветят всю плоскость.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Доказать, что существует число q такое, что в десятичной записи числа $q\cdot 2^{1967}$ нет ни одного нуля.

Реш **1**.

З-ча **2**. Обозначим через $d(N)$ число делителей N. Найти все N такие, что $\frac{N}{d(N)}=P$ — целое и простое число (числа 1 и N также считаются делителями).

Реш **2**.

З-ча **3**. На каждой стороне прямоугольного треугольника построено по квадрату (пифагоровы штаны), и вся фигура вписана в круг. Для каких прямоугольных треугольников это можно сделать?

Реш **3**.

З-ча **4**. На шахматной доске размера 1000×1000 находится черный король и 499 белых ладей. Черные и белые ходят по очереди. Доказать, что как бы ни ходили ладьи, король всегда может за несколько ходов встать под бой одной из них.

Реш **4**.

З-ча **5**. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. Во всех них сеансы начинаются в 9.00, 10.40, 12.20, 14.00, 15.40, 17.20, 19.00 и 20.40. (8 сеансов). На каждый сеанс шестеро шли вместе, а кто-нибудь один (не обязательно один и тот же) шел в другой кинотеатр. К вечеру каждый побывал в каждом кинотеатре. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не был ни один из этих школьников.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Число Y получается из натурального числа X некоторой перестановкой его цифр. Известно, что $X + Y = 1000\ldots00$ (200 нулей). Доказать, что X делится на 50.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дана последовательность целых положительных чисел $X_1, X_2 \ldots X_n$, все элементы которой не превосходят некоторого числа M. Известно, что при всех $k > 2$ $X_k = |X_{k-1} - X_{k-2}|$. Какой может быть максимальная длина этой последовательности?

Реш **2**.

З-ча **3**. На каждой стороне треугольника ABC построено по квадрату во внешнюю сторону (пифагоровы штаны). Оказалось, что внешние вершины всех квадратов лежат на одной окружности. Доказать, что треугольник ABC — равнобедренный.

Реш **3**.

З-ча **4**. Задано натуральное число A такое, что для любого натурального N, делящегося на A, число $\overleftarrow{N}$ тоже делится на A. ($\overleftarrow{N}$ — число, состоящее из тех же цифр, что и N, но записанных в обратном порядке). Например, $\overleftarrow{1967} = 7691$, $\overleftarrow{450} = 54$. Доказать, что A является делителем числа 99.

Реш **4**.

З-ча **5**. Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящие рядом, причем это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов, и два расположения, отличающиеся поворотом круга, он считает одинаковыми. Доказать, что как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их расположения.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Дана таблица $n \times n$ клеток. Таблица заполняется следующим образом: пусть в некоторой строчке записаны числа $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ (m и $n-k$ взаимно просты). Тогда в следующей строчке записываются те же числа, но в таком порядке: $a_{m+1}, \ldots a_n, a_{k+1}, \ldots a_m, a_1 \ldots a_k$. В первую строчку записываются числа $1, 2 \ldots n$. Доказать, что после заполнения таблицы в каждом столбце будут написаны все числа от 1 до n.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 9 класса.

З-ча **3**. Можно ли расставить на окружности числа $1, 2 \ldots 12$ так, чтобы разность между двумя рядом стоящими числами была 3, 4 или 5?

Реш **3**.

З-ча

4. В восьми данных точках пространства установлено по прожектору, каждый из которых может осветить в пространстве октант (трехгранный угол со взаимно-перпендикулярными сторонами). Доказать, что можно повернуть прожекторы так, чтобы они осветили все пространство.

Реш **4**.

З-ча **5**. Рассматриваются всевозможные n-значные числа, составленные из цифр 1, 2 и 3. В конце каждого из этих чисел приписывается цифра 1, 2 или 3 так, что к двум числам, у которых во всех разрядах стоят разные цифры, приписываются разные цифры. Доказать, что найдется n-значное число, в записи которого участвует лишь одна единица и к которому приписывается единица.

Реш **5**.

XXXI олимпиада (1968)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Число 4 обладает тем свойством, что при делении его на q^2 остаток получается меньше $q^2/2$, каково бы ни было q. Перечислить все числа, обладающие этим свойством.

Реш **1**. О т в е т : 1 и 4.

Докажем сначала, что если n — натуральное число, отличное от 1 и 4, то $n < [\sqrt{2n}]^2$. Действительно, для чисел $n \leqslant 7$ это утверждение легко проверяется, а если $n \geqslant 8$, то $n^2 \geqslant 8n$, поэтому $n \geqslant 2\sqrt{2n}$, а значит, $[\sqrt{2n}]^2 \geqslant (\sqrt{2n}-1)^2 = 2n - 2\sqrt{2n} + 1 > n$.

Пусть n — натуральное число, отличное от 1 и 4. Положим $q = [\sqrt{2n}]$. Тогда $n < q^2$, поэтому остаток от деления n на q^2 равен n. Но $q = [\sqrt{2n}] \leqslant \sqrt{2n}$, поэтому $n^2 \geqslant q/2$.

З-ча **2**. Расставить в таблице 4×4 16 чисел так, чтобы сумма чисел по любой вертикали, горизонтали и диагонали равнялась нулю. (*Примечание.* Квадрат имеет 14 диагоналей, включая все малые, состоящие из трёх, двух и одной клеток.)

Реш **2**. Таблица последовательно заполняется единственным образом:

0	a		0
-a			
0			0

;

0	a	-a	0
-a			
a			
0			0

;

0	a	-a	0
-a	0		a
a			
0	-a		0

;

0	a	-a	0
-a	0	0	a
a	0	0	-a
0	-a	a	0

.

З-ча **3**. Доказать, что для любых трех чисел, меньших 1 000 000, найдется число меньшее 100, взаимно простое с каждым из них.

Реш **3**. Составим сначала список простых чисел, меньших 100. (Составное число, меньшее 100, имеет делитель, меньший $\sqrt{100} = 10$, поэтому среди чисел 1, 2, ..., 99 нужно вычеркнуть числа, делящиеся на 2, 3, 5 и 7.) Список получится следующий: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 78, 83, 89, 97. Предположим, что на каждое из этих чисел делится хотя бы одно из трёх данных чисел a, b, c. Тогда $abc \geqslant 2\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot 97 > 10^{18}$. Но $a, b, c \leqslant 10^6$. Поэтому $abc \leqslant 10^{18}$.

З-ча **4**. Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

Реш **4**. Выделим один город и соединим его авиалинией с каждым из остальных 49 городов. Для этого потребуется 49 авиалиний. Покажем, что меньшим числом авиалиний обойтись нельзя. А именно, докажем индукцией по n, что связный граф с n вершинами содержит не менее $n-1$ рёбер. При $n \leqslant 2$ это утверждение очевидно. Возбмём связный граф с n вершинами и будем последовательно уничтожать его рёбра до тех пор, пока он не перестанет быть связным. Пусть до уничтожения k-го по счёту ребра ($k \geqslant 1$) граф был связным, а после его уничтожения он распался на два графа с n_1 и n_2 вершинами. Эти графы связны, поэтому по предположению индукции они имеют, сответственно, не менее $n_1 - 1$ и $n_2 - 1$ рёбер. Следовательно, исходный граф имеет не менее $k + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = k + n - 2 \geqslant n - 1$ рёбер.

8 класс

З-ча **1**. В шахматном турнире участвовало 12 человек. После окончания турнира каждый участник составил 12 списков. В первый список входит только он сам, во второй — он и те, у кого он выиграл, в третий — все люди из второго списка и те, у кого они выиграли, и т.д. В 12 список входят все люди из одиннадцатого списка и те, у кого они выиграли. Известно, что для любого участника турнира в его двенадцатый список попал человек, которого не было в его одиннадцатом списке. Сколько ничейных партий было сыграно в турнире?

Реш **1**. О т в е т : 54. Если $(k+1)$-й способ такой же, как k-й, то списки с номерами $k+2, \dots, 11, 12$ тоже будут точно такими же. Но по условию 11-й список и 12-й разные. Следовательно, у каждого участника k-й список содержит ровно k человек. В частности, 2-й список содержит ровно двух человек. Это означает, что каждый участник выиграл ровно одну партию. Поэтому число ничьих равно $\frac{12\cdot 11}{2} - 12 = 54$.

З-ча **2**. Даны числа: 4, 14, 24, ..., 94, 104. Докажите, что из них нельзя вычеркнуть сперва одно число, затем из оставшихся еще два, затем еще три и наконец, еще четыре числа так, чтобы после каждого вычеркивания сумма оставшихся чисел делилась на одиннадцать.

Реш **2**. Всего дано 11 чисел, а нужно вычеркнуть 10 чисел. Поэтому в конце должно остаться одно число, делящееся на 11, т.е. число 44. С другой стороны, число 44 мы должны вычеркнуть самым первым. Действительно, сумма всех данных чисел равна $\frac{11\cdot 108}{2}$, поэтому она делится на 11. Следовательно, если после вычёркивания одного числа сумма оставшихся чисел делится на 11, то вычеркнутое число тоже делится на 11.

З-ча **3**. Можно ли вписать в окружность выпуклый семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ с углами $A_1 = 140°$, $A_2 = 120°$, $A_3 = 130°$, $A_4 = 120°$, $A_5 = 130°$, $A_6 = 110°$, $A_7 = 150°$?

Реш **3**. О т в е т : нет, нельзя. Предположим, что выпуклый семиугольник $A_1A_2\dots A_7$ вписан в окружность с центром O. Тогда $\angle A_1OA_3 = \angle A_3OA_5 = 2(180° - 120°) = 120°$ и $\angle A_5OA_7 = 2(180° - 110°) = 140°$, поэтому $\angle A_1OA_3 + \angle A_3OA_5 + \angle A_5OA_7 > 360°$. Но эта сумма углов должна быть меньше $360°$.

З-ча **4**. Выбрать 100 чисел, удовлетворяющих условиям

$$\begin{array}{ccc} x_1 = 1 & 0 \leqslant x_3 \leqslant 2x_2 & 0 \leqslant x_{99} \leqslant 2x_{98} \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2x_1 & \dots & 0 \leqslant x_{100} \leqslant 2x_{99} \end{array}$$

так, чтобы выражение $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{99} - x_{100}$ было максимально.

Реш **4**. О т в е т : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, ... , $x_{99} = 2^{98}$, $x_{100} = 0$.

Запишем рассматриваемую сумму в виде $S = x_1 + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{99} - x_{98}) - x_{100}$. Неравенство $x_{k+1} \leqslant 2x_k$ показывает, что $x_{k+1} - x_k \leqslant x_k$. Поэтому $S \leqslant x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_{98}$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда $x_3 = 2x_2$, $x_5 = 2x_4, \dots , x_{99} = 2x_{98}$ и $x_{100} = 0$. Наконец, выражение $x_1 + x_2 + x_4 + \dots + x_{98}$ максимально в случае, когда $x_2 = 2x_1$, $x_4 = 2x_3, \dots , x_{98} = 2x_{97}$.

З-ча **5**. Можно ли расположить на плоскости 1000 отрезков так, чтобы каждый отрезок обоими своими концами упирался строго внутрь других отрезков?

Реш **5**. О т в е т : нет, нельзя. Пусть на плоскости расположено несколько отрезков. Выберем прямую, которая не перпендикулярна ни одному из этих отрезков, и рассмотрим проекции концов отрезков на эту прямую. Среди этих проекций есть две крайние, между которыми заключены все остальные. Если проекция конца отрезка является крайней, то этот конец не может упираться строго внутрь другого отрезка.

9 класс

З-ча **1**. Существует ли четырехугольник $ABCD$ площади 1 такой, что для любой точки O внутри него площадь хотя бы одного из треугольников OAB, OBC, OCD, OAD есть иррациональное число?

Реш **1**.

З-ча **2**. Можно ли расположить на плоскости 1968 отрезков так, чтобы каждый из них обоими концами упирался строго внутрь других отрезков?

Реш **2**. О т в е т : нет, нельзя. См. решение задачи 5 для 8 класса.

З-ча **3**. В коридоре длиной 100 метров постелено 20 ковровых дорожек общей длины 1000 метров. Каково может быть наибольшее число незастеленных кусков (ширина дорожки равна ширине коридора)?

Реш **3**.

З-ча **4**. Можно ли выбрать 100 000 номеров телефонов из 6 цифр каждый так, чтобы при одновременном вычеркивании из всех этих номеров k-той цифры ($k = 1, 2, \dots 6$) получили все пятизначные номера от 00000 до 99999?

Реш **4**.

З-ча **5**. Докажите, что если p и q — два простых числа, причем $q = p + 2$, то $p^q + q^p$ делится на $p + q$.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Из пункта A одновременно вылетают 100 самолетов (флагманский и 99 дополнительных). С полным баком горючего самолет может пролететь 1000 км. В полете самолеты могут передавать друг другу горючее. Самолет, отдавший горючее другим, совершает планирующую посадку. Каким образом надо совершать перелет, чтобы флагман пролетел возможно дальше?

Реш **1**.

З-ча **2**. Двое играют в следующую игру: имеется две кучи конфет. Играющие делают ход по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает одну из куч, а другую делит на две (равные или неравные) части. Если он не может разделить кучу, так как там всего одна конфета, то он ее съедает и выигрывает.

Вначале в кучах было 33 и 35 конфет. Кто выигрывает, начинающий или его партнер, и как для этого надо играть?

Реш **2**.

З-ча **3**. Можно ли разбить все целые неотрицательные числа на 1968 классов так, чтобы в каждом классе было хотя бы одно число и выполнялось бы следующее условие: если число m получается из числа n вычеркиванием двух рядом стоящих цифр или одинаковых групп цифр, то и m, и n принадлежат одному классу (например, числа 7, 9339337, 9322393447, 932239447 — обязательно принадлежат одному классу)?

Реш **3**.

З-ча **4**. По заданной последовательности положительных чисел $q_1, \dots q_n \dots$ строится последовательность многочленов следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} f_0(x) & = & 1 \\ f_1(x) & = & x \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n+1}(x) & = & (1+q_n)xf_n(x) - q_nf_{n-1}(x) \end{array}$$

Докажите, что все вещественные корни n-того многочлена заключены между -1 и $+1$.

Реш **4**.

З-ча **5**. В пространство введены 4 попарно скрещивающиеся прямые, l_1, l_2, l_3, l_4, причем никакие три из них не параллельны одной плоскости. Провести плоскость P так, чтобы точки A_1, A_2, A_3, A_4 пересечения этих прямых с P образовывали параллелограмм. Сколько есть решений?

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. На плоскости отмечено 1968 точек, являющихся вершинами правильного 1968-угольника. Двое играют в следующую игру: каждый по очереди соединяет две вершины многоугольника отрезком, соблюдая следующие правила: нельзя соединять две точки, хотя бы одна из которых уже соединена с чем-то, и нельзя пересекать уже проведенные отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода согласно этим правилам. Как нужно играть, чтобы выиграть?

Кто выигрывает при правильной игре?

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости даны три точки. Из них выбираются любые две, строится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, и все точки отражаются относительно этой прямой, затем из всех точек (старых и новых) снова выбираются какие-то две точки и вся процедура повторяется. Так делается бесконечно много раз. Доказать, что в плоскости найдется такая прямая, что все полученные точки будут лежать по одну сторону от нее.

Реш **2**.

З-ча **3**. Два маляра красят забор, огораживающий дачные участки. Они приходят через день и красят по одному участку (участков 100 штук) в красный или зеленый цвет. Первый маляр дальтоник и путает цвета, он помнит, что и в какой цвет он сам покрасил, и видит, что покрасил второй маляр, но не знает, в какой цвет. Первый маляр добивается того, чтобы в наибольшем числе мест зеленый участок граничил с красным. Какого наибольшего числа переходов он может добиться (как бы ни действовал второй маляр)?

Реш **3**.

З-ча **4**. Двухсотзначное число $89252525\dots2525$ умножено на число $444x18y27$ (x и y неизвестные цифры). Оказалось, что 53-я цифра полученного знака (считая справа) есть 1, а 54-я — 0. Найти x и y.

Реш **4**.

З-ча **5**. Ковбой Джимми поспорил с друзьями, что сумеет одним выстрелом пробить все четыре лопасти вертилятора. (Вертилятор устроен следующим образом: на оси, вращающейся со скоростью 50 об/сек, расположены на равных расстояниях друг от друга 4 полудиска, повернутые друг относительно друга под какими-то углами). Джимми может стрелять в любой момент и добиваться произвольной скорости пуль. Доказать, что Джимми выиграет пари.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Разобьем все натуральные числа на группы так, чтобы в первой группе было одно число, во второй — два, в третьей — три и т.д. Можно ли это сделать таким образом, чтобы из суммы чисел в каждой группе нацело извлекался корень седьмой степени?

Реш **1**.

З-ча **2**. Две прямые на плоскости пересекаются под углом α. На одной из них сидит блоха. Каждую секунду она прыгает с одной прямой на другую (точка пересечения считается принадлежащей обеим прямым). Известно, что длина каждого ее прыжка равна 1 и что она никогда не возвращается на то место, где была секунду назад. Через некоторое время блоха вернулась в первоначальную точку. Докажите, что угол α измеряется рациональным числом градусов.

Реш **2**.

З-ча **3**. Круглый пирог режут следующим образом. Вырезают сектор с углом α, переворачивают его на другую сторону и весь пирог поворачивают на угол β. Дано, что $\beta < \alpha < 180^\circ$. Доказать, что после некоторого конечного числа таких операций каждая точка пирога будет находиться на том же месте, что и в начале.

Реш **3**.

З-ча **4**. На бумажной ленте напечатаны автобусные билеты с номерами от 000 000 до 999 999. Затем синей краской пометили те билеты, у которых сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Какая будет наибольшая разность между номерами двух соседних синих билетов?

Реш **4**.

З-ча **5**. Страна Фарра расположена на 1 000 000 000 островов. Между некоторыми островами каждый день курсируют пароходы. Маршруты пароходов устроены так, что с каждого острова можно попасть на любой другой (возможно, за несколько дней). Шпион и майор Пронин могут совершать не более одного рейса в день на пароходе и не имеют никакой другой возможности попасть с острова на остров. Шпион не ездит на пароходе 13 числа каждого месяца, майор Пронин не суеверен и всегда знает, где находится шпион. Доказать, что майор сможет поймать шпиона (т.е. оказаться с ним на одном острове).

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. На плоскости нарисован правильный многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Можно ли выбрать в плоскости множество точек, обладающее следующим свойством: через любую точку, не лежащую внутри пятиугольника, можно провести отрезок, концы которого являются точками нашего множества, а через точки, лежащие внутри пятиугольника, такого отрезка провести нельзя.

Примечание.

1. Отрезок проходит через любую свою точку, в частности, через свой конец.

2. «Внутри» — значит строго внутри.

Реш **1**.

З-ча **2**. На окружности радиуса 1 отмечена точка O и из нее циркулем делается засечка вправо радиусом l. Из полученной точки O_1 в ту же сторону тем же радиусом делается вторая засечка, и так делается 1968 раз. После этого окружность разрезается во всех 1968 засечках, и получается 1968 дуг. Сколько различных длин дуг может при этом получиться?

Реш **2**.

З-ча **3**. Белые и черные играют в следующую игру. В углах шахматной доски стоят два короля: белый на a_1, черный на $h8$. Играющие делают ход по очереди. Начинают белые. Играющий может ставить своего короля на любое соседнее поле (если только оно свободно), соблюдая следующие правила: нельзя увеличивать расстояние между королями (расстоянием между двумя полями называется наименьшее число шагов короля, за которое он может пройти с одного поля на другое: так, в начале игры расстояние между королями — 7 ходов). Выигрывает тот, кто поставит своего короля на противоположную кромку доски (белого короля на вертикаль h или восьмую горизонталь, черного — на вертикаль «a» или первую горизонталь). Как нужно играть, чтобы выиграть? Кто выигрывает при правильной игре?

Реш **3**.

З-ча **4**. Известно, что $a^n - b^n$ делится на n (a, b, n — натуральные числа, $a \neq b$). Доказать, что $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ делится на n.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дано натуральное число N. С ним производится следующая операция: каждая цифра этого числа заносится на отдельную карточку (при этом разрешается добавлять или выбрасывать любое число карточек, на которых написана цифра 0), и затем эти карточки разбивают на две кучи. В каждой из них карточки располагаются в произвольном порядке, и полученные два числа складываются. С полученным числом N_1 проделывается такая же операция, и т.д. Докажите, что за пятнадцать шагов из N можно получить однозначное число.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Внутри выпуклого многоугольника M помещена окружность максимально возможного радиуса R (это значит, что внутри M нельзя поместить окружность большего радиуса). Известно, что внутри можно провернуть отрезок длины 1 на любой угол (т.е. мы можем двигать единичный отрезок как твердый стержень по плоскости так, чтобы он не вылезал за пределы многоугольника M и при этом повернулся на любой заданный угол). Докажите, что $R \geqslant 1/3$.

Реш **1**.

З-ча **2**. В таблице A размером 10 на 10 написаны какие-то числа. Обозначим сумму всех чисел в первой строке через S_1, во второй через S_2 и т.д. Аналогично, сумму чисел в первом столбце обозначим через t_1, во втором — t_2 и так далее. Составлена новая таблица B размером 10 на 10, в нее вписаны числа следующим образом: в первой клетке первой строки пишется наименьшее из чисел S_1 и t_1, в третьей клетке пятой строки пишется наименьшее из чисел S_5 и t_3, аналогично записана вся таблица. Оказалось, что можно так занумеровать клетки таблицы B числами от 1 до 100, что в клетке с k-м номером будет стоять число, меньшее или равное k. Какое максимальное значение может принимать при этих условиях сумма всех чисел таблицы A?

Реш **2**.

З-ча **3**. Рассматривается система уравнений:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdots + x_k & = & 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_k^3 & = & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ x_1^{19} + x_2^{19} + \cdots + x_k^{19} & = & 0 \\ x_1^{21} + x_2^{21} + \cdots + x_k^{21} & = & 1 \end{array}$$

(все x_i — вещественные числа).

Докажите, что при некоторых k такая система имеет решение.

Реш **3**.

З-ча **4**. Правильный треугольник ABC разбит на N выпуклых многоугольников так, что каждая прямая пересекает не более 40 из них (мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если они имеют общую точку, например, если прямая проходит через вершину многоугольника). Может ли быть N больше миллиона?

Реш **4**.

З-ча **5**. На поверхности кубика мелом отмечено 100 различных точек. Докажите, что можно двумя различными способами поставить кубик на черный стол (причем в точности на одно и то же место) так, чтобы отпечатки от мела на столе при этих способах были равными. (Если точка отмечена на ребре или в вершине, она тоже дает отпечаток).

Реш **5**.

XXXII олимпиада (1969)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Белая ладья преследует черного слона на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять слона? Первый ход делают белые.

Реш **1**.

З-ча **2**. Старинный замок был обнесен треугольной стеной. Каждая сторона стены была поделена на три равные части, и в этих точках, а также в вершинах были построены башни. Всего вдоль стены было 9 башен: A, E, F, B, K, L, C, M, N. Со временем все стены и башни, кроме башен E, K, M, разрушились. Как по оставшимся башням определить, где находились башни A, B, C, если известно, что башни A, B, C стояли в вершинах?

Реш **2**.

З-ча **3**. В Чили в феврале проходил международный турнир по футболу. Первое место с 8-ю очками занял местный клуб «Коло-Коло». На очко отстало московское «Динамо» и заняло второе место. 3-е место с 4-мя очками занял бразильский клуб «Коринтианс». 4-е место занял югославский клуб «Црвéна Звéзда», также набравший 4 очка. Доказать, что по этим данным можно точно определить, сколько еще команд участвовало в турнире и по сколько очков они набрали.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что никакая степень числа 2 не оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами.

Реш **4**.

З-ча **5**. Имеется 1000 деревянных правильных 100-угольников, прибитых к полу. Всю эту систему мы обтягиваем веревкой. Натянутая веревка будет ограничивать некоторый многоугольник. Доказать, что у него более 99 вершин.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 4 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется 57 деревянных правильных 57-угольников, прибитых к полу. Всю эту систему мы обтягиваем веревкой. Натянутая веревка будет ограничивать некоторый многоугольник. Доказать, что у него более 56 вершин.

Реш **2**.

З-ча **3**. Белая ладья преследует черного коня на доске 3×1969 клеток (они ходят по очереди по обычным правилам). Как должна играть ладья, чтобы взять коня? Первый ход делают белые.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дан отрезок AB. Найти геометрическое место (множество) точек C таких, что в треугольнике ABC медиана, проведенная из вершины B, равна высоте, проведенной из вершины A.

Реш **4**.

З-ча **5**. Можно ли записать в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых **трех** последовательных чисел была положительна, а сумма **всех** 20 чисел была отрицательна?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Найти все натуральные числа x, обладающие следующим свойством: из каждой цифры числа x можно вычесть одну и ту же цифру $a \neq 0$ (т.е. все цифры его не меньше a) и при этом получится $(x-a)^2$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Остров *Толпыго* имеет форму многоугольника. На нем расположено несколько стран, каждая из которых имеет форму треугольника, причем каждые две граничащие страны имеют целую общую сторону (т.е. вершина одного треугольника не лежит на стороне другого). Доказать, что карту этого острова можно так раскрасить тремя красками, чтобы каждая страна была закрашена одним цветом и любые две граничащие страны были закрашены в разные цвета.

Реш **2**.

З-ча **3**. Можно ли записать в строку 50 чисел так, чтобы сумма любых 17 последовательных чисел была положительна, а сумма любых 10 последовательных чисел была отрицательна? (Ср. с задачей 5 для 8 класса).

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. В государстве царя Додона расположено 500 городов, каждый из которых имеет форму правильной 37-угольной звезды, в вершинах которой находятся башни. Додон решил обнести их выпуклой стеной так, чтобы каждый отрезок стены соединял две башни. Доказать, что стена будет состоять **не менее чем** из 37 отрезков. (Если несколько отрезков лежат на одной прямой, то они считаются за один. Ср. с задачей 5 для 7 класса.)

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. На выходе из бетатрона установлены два одинаковых тонких обруча, расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях, причем каждый обруч проходит через центр другого. Частицы, вылетающие из бетатрона, пролетают по прямой сквозь оба обруча. По какой прямой они должны двигаться, чтобы находиться на наибольшем расстоянии от обручей, т.е. чтобы наименьшее расстояние, на которое частицы приближаются к обручу, было как можно больше?

Реш **1**.

З-ча **2**. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$. Она периодична с периодом 100, т.е. $a_1 = a_{101}$, $a_2 = a_{102}$, $\ldots$. Известно, что $a_1 \geqslant 0$, $a_1 + a_2 \leqslant 0$, $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 0$ и, вообще, сумма $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ неотрицательна при нечетном n и неположительна при четном n. Доказать, что $|a_{99}| \leqslant |a_{100}|$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Колода перфокарт четырех цветов разложена в один ряд. Если две перфокарты одного цвета лежат рядом или через одну, то можно выбрасывать ту из них, которая левее. Кроме того, можно подкладывать справа любое количество перфокарт из других колод. Доказать, что можно подкладывать и выбрасывать перфокарты таким образом, чтобы в конце концов их осталось только четыре.

Реш **3**.

З-ча **4**. Существует ли такое число h, что ни для какого натурального числа n число $[h \cdot 1969^n]$ не делится на $[h \cdot 1969^{n-1}]$?

Реш **4**.

З-ча **5**. Дан квадрат $ABCD$. Найти геометрическое место (множество) таких точек M, что выполняется равенство $\angle AMB = \angle CMD$.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Даны два целых положительных числа m и n. Выписываются все различные делители числа m — числа $a, b, \ldots, k$ — и все различные делители числа n — числа $s, t, \ldots, z$. (Само число и 1 тоже включаются в число делителей.) Оказалось, что

$$a + b + \cdots + k = s + t + \cdots + z$$

$$\text{и } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{k} = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \cdots + \frac{1}{z}.$$

Доказать, что $m = n$.

Реш **1**.

З-ча **2**. С числом 123456789101112...9989991000 производится следующая операция: зачеркиваются две соседние цифры a и b (a стоит перед b) и на их место вставляется число $a + 2b$ (можно в качестве a взять нуль, «стоящий» перед числом, а в качестве b — первую цифру числа). С полученным числом производится такая же операция и т.д. (Например, из числа 118 307 можно **на первом** шаге получить числа 218 307, 38 307, 117 307, 111 407, 11 837, 118 314.) Доказать, что таким способом можно получить число 1.

Реш **2**.

З-ча **3**. Некий фермер приобрел квадратный участок земли, обнес его забором и получил у доверчивого арендатора документ, в котором сказано, что он имеет право несколько раз произвести следующую операцию: провести прямую через любые две точки забора, огораживающего его участок, снести участок забора между этими двумя точками по одну сторону от прямой и достроить такой же кусок забора с другой стороны симметрично снесенной части относительно выбранной прямой. Сможет ли он такими операциями увеличить площадь своего участка?

Реш **3**.

З-ча **4**. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности 1, 2, 3, ..., 100, 101. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся два числа. Затем второй игрок присуждает первому столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Доказать, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

Реш **4**.

З-ча **5**. В круглый пудинг радиуса 10 см запечена жемчужина радиуса 3 мм. Мы хотим ее найти. Для этого разрешается разрезать пудинг острым ножом по прямой на две (одинаковые или разные) части. Если жемчужина не попадет под нож, можно одну из этих частей снова разрезать; если она снова не будет обнаружена, можно разрезать одну из трех получившихся частей и т.д. Доказать, что, как бы мы ни резали, может случиться, что после 32 разрезов жемчужина все еще не будет обнаружена. Доказать, что можно так сделать 33 разреза, что жемчужина обязательно будет обнаружена, где бы она ни находилась.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. На шахматной доске на поле $a1$ стоит белый конь. Двое по очереди замазывают по одной клетке шахматной доски бокситовым клеем. При этом они должны замазывать так, чтобы конь мог пройти в любую незамазанную клетку, нигде не приклеившись (конь ходит по обычным шахматным правилам). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает при правильной игре: сделавший первый ход или его партнер?

Реш **2**.

З-ча **3**. Имеется два правильных пятиугольника с одной общей вершиной. Вершины каждого пятиугольника нумеруются по часовой стрелке цифрами от 1 до 5, причем в общей вершине ставится цифра 1. Вершины с одинаковыми номерами соединены прямыми. Доказать, что полученные четыре прямые пересекаются в одной точке.

Реш **3**.

З-ча **4**. Из натуральных чисел составляются последовательности, в которых каждое последующее число больше квадрата предыдущего, а последнее число в последовательности равно 1969 (последовательности могут иметь разную длину). Доказать, что различных последовательностей такого вида меньше чем 1969.

Реш **4**.

З-ча **5**. В ряд поставлено 100 кубиков: 77 черных и 23 белых. Они расставлены *приблизительно равномерно*, т.е. если в любом месте отметить некоторое количество кубиков подряд и потом в другом месте отметить **такое же число** кубиков подряд, то число черных кубиков в первом наборе отличается от числа черных кубиков во втором наборе не более чем на 1; при этом, если первый набор стоит на **левом** краю, то число черных кубиков в нем не больше, чем во втором наборе, а если первый набор стоит на **правом** краю, то число черных кубиков в нем не меньше, чем во втором наборе. Доказать, что если расставить другой набор из 77 черных и 23 белых кубиков так, чтобы выполнялись те же условия, то белые кубики будут стоять на тех же местах.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает одно число из ряда $1, 2, 3, \ldots, 27$ до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый игрок, если не делится — то второй. Кто выиграет при правильной игре: первый или второй?

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется пятак, с помощью которого можно чертить окружности на плоскости (обводить пятак). Разрешается с его помощью проводить окружность через одну или две данные точки (расположенные достаточно близко друг от друга). На плоскости заданы три точки, которые можно закрыть одним пятаком и которые не лежат на одной прямой или на одной окружности, равной окружности пятака. Построить четвертую точку так, чтобы полученные четыре точки лежали в вершинах параллелограмма. Разрешается использовать только один пятак.

Реш **2**.

З-ча **3**. Одна под другой выписаны 2^{n-1} различных последовательностей из нулей и единиц длины n. Известно, что для любых трех из выписанных последовательностей найдется такой номер p, что в p-м разряде у них стоит 1 (у всех трех). Доказать, что в некотором разряде у всех выписанных последовательностей стоит 1 и такой разряд только один.

Реш **3**.

З-ча **4**. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент поддерживает Мирафлореса (регулярная армия Анчурии). Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы были «демократическими». «Демократическим голосованием » Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на равные группы; каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, причем бо́льшие группы могут разбиваться на разное количество меньших групп, затем эти группы снова разбиваются и т.д. В самых мелких группах выбирают представителя группы — *выборщика* — для голосования в большей группе: выборщики в этой большей группе выбирают выборщика для голосования в еще большей группе и т.д. Наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы по своей воле и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические» выборы, чтобы его выбрали? (В каждой группе выборщики выбирают своего представителя простым большинством. При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

Реш **4**.

З-ча **5**. Правильный 1000-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Доказать, что среди этих диагоналей найдется не менее 8 диагоналей, длины которых попарно различны.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Два мудреца играют в следующую игру. Выписаны числа $0, 1, 2, \ldots, 1024$. Первый мудрец зачеркивает 512 чисел (по своему выбору), второй зачеркивает 256 из оставшихся, затем снова первый зачеркивает 128 чисел и т.д. На десятом шаге второй мудрец зачеркивает одно число; остаются **два** числа. После этого второй мудрец платит первому разницу между этими числами. Как выгоднее играть первому мудрецу? Как второму? Сколько уплатит второй мудрец первому, если оба будут играть наилучшим образом? (Ср. с задачей 4 для 7 класса и с задачей 1 для 9 класса.)

Реш **1**.

З-ча **2**. Жесткая проволока выгнута в форме правильного треугольника, и края ее запаяны. Разрешается перегибать кусок проволоки, заключенный между любыми двумя ее точками так, чтобы отогнутый кусок был симметричен прежнему относительно прямой, проходящей через эти точки (если эти точки совпадают, то прямую через них можно проводить произвольным образом). Так разрешается делать несколько раз. Можно ли несколькими такими операциями получить правильный шестиугольник того же периметра? (Ср. с задачей 3 для 7 класса).

Реш **2**.

З-ча **3**. В шарообразный пудинг радиуса 20 см запечена жемчужина радиуса 3 мм. Мы хотим ее найти. Для этого разрешается разрезать пудинг острым ножом по прямой на две (одинаковые или разные) части. Если жемчужина не попадет под нож, то можно одну из этих частей снова разрезать; если она снова не будет обнаружена, можно разрезать одну из трех получившихся частей и т.д. Доказать, что, как бы мы ни резали, может случиться, что после 65 разрезов жемчужина все еще не будет обнаружена. Доказать, что можно так сделать 66 разрезов, что жемчужина обязательно будет обнаружена, где бы она ни находилась.

Реш **3**.

З-ча **4**. На клетках шахматной доски 8×8 написаны числа, сумма которых равна нулю. Затем каждую клетку разбили на 4 ячейки (вертикальными и горизонтальными линиями). Можно ли так вписать числа в ячейки, чтобы одновременно выполнялись условия: а) в ячейках у края доски стояли нули; б) для каждой клетки суммы чисел, стоящих в четырех ячейках этой клетки, равнялись числу, которое раньше было в ней написано; в)для каждого узла шахматной доски (там, где встречаются 4 клетки) сумма чисел, стоящих в примыкающих к нему четырех ячейках, равнялась нулю?

Реш **4**.

З-ча **5**. Требуется расставить 1969 кубиков в ряд так, чтобы часть из них — число между 0 и 1969 — были белыми, а остальные — черными, причем цвета должны распределяться *приблизительно равномерно* (см. условие задачи 5 для 8 класса). Доказать, что существует по крайней мере 1970 различных способов расстановки кубиков в ряд так, чтобы выполнялись эти требования.

Реш **5**.

XXXIII олимпиада (1970)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. На бесконечной шахматной доске на двух соседних по диагонали черных полях стоят две черные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число черных шашек и одну белую таким образом, чтобы белая **одним ходом** взяла **все** черные шашки, включая две первоначально стоявшие?

Реш **1**.

З-ча **2**. На 99 карточках пишутся числа $1, 2, 3, \ldots, 99$. Затем карточки перемешиваются, раскладываются чистыми сторонами вверх и на чистых сторонах снова пишутся числа $1, 2, 3, 4, \ldots, 99$. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются и 99 полученных сумм перемножаются. Доказать, что в результате получится чётное число.

Реш **2**.

З-ча **3**. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O. Известно, что $\angle AOB = 113^\circ$, $\angle BOC = 123^\circ$. Найти углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA, OB, OC.

Реш **3**.

З-ча **4**. В наборе имеется 100 гирь, каждые две из которых отличаются по массе не более чем на 20 г. Доказать, что эти гири можно положить на две чашки весов, по 50 штук на каждую, так, чтобы одна чашка весов была легче другой не более чем на 20 г.

Реш **4**.

З-ча **5**. В городе X имеется 1000 коттеджей, в каждом из которых живет по одному человеку. В один прекрасный день каждый человек переезжает из своего дома в какой-либо другой (переезд осуществляется так, что после него в каждом доме живет один жилец). Доказать, что после переезда можно так покрасить все 1000 коттеджей синей, зеленой и красной красками, чтобы у каждого хозяина цвет его нового дома отличался от цвета старого дома.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Около окружности описан пятиугольник $ABCDE$, стороны которого — **целые числа** и $AB = CD = 1$. Окружность касается стороны BC в точке K. Найти длину отрезка BK.

Реш **2**.

З-ча **3**. На прямоугольном листе бумаги расставлены 16 черных точек. Для каждой пары точек проделывается следующая операция: они соединяются отрезком, и затем прямоугольник, диагональю которого является этот отрезок, а стороны параллельны сторонам листа, закрашивается красным цветом (имеется в виду, что черные точки просвечивают на красном фоне). Сколько сторон может иметь закрашенная фигура? (Указать все ответы, которые могут получиться при различных расположениях точек.)

Реш **3**.

З-ча **4**. На каждую чашку весов положили k гирь, занумерованных числами от 1 до k, причём левая чашка перевесила. Оказалось, что если поменять чашками любые две гири с одинаковыми номерами, то всегда либо правая чашка начинает перевешивать, либо чашки приходят в равновесие. При каких k это возможно?

Реш **4**.

З-ча **5**. 12 теннисистов участвовали в турнире. Известно, что каждые два теннисиста сыграли между собой ровно один раз и не было ни одного теннисиста, проигравшего все встречи. Доказать, что найдутся теннисисты A, B, C такие, что A выиграл у B, B у C, C у A. (В теннисе ничьих не бывает.)

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Вдоль прямой дороги располагались 113 дворцов, в каждом из которых жил король. Ежедневно один из них устраивал прием, на который утром съезжались все остальные, а вечером слуги развозили их по домам. Так они жили год и никуда больше не выезжали. Доказать, что самый большой путь за этот год проехал один из королей, живущих в крайних дворцах.

Реш **1**.

З-ча **2**. Какое максимальное количество чёрных шашек можно расставить на шашечной доске 8×8 так, чтобы простая белая шашка могла взять их все за один ход, не попадая при этом в дамки? Шашки стоят на чёрных полях.

Реш **2**.

З-ча **3**. Дано 999-значное число. Известно, что если взять из него любые 50 последовательных цифр и вычеркнуть все остальные, то полученное число будет делиться на 2^{50}. (Оно может начинаться с нулей или просто быть нулём.) Доказать, что исходное число делится на 2^{999}.

Реш **3**.

З-ча **4**. Построить треугольник по радиусу описанной окружности и биссектрисе угла A, если известно, что $\angle B - \angle C = 90°$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Мудрый таракан, который видит не дальше, чем на 1 см, решил отыскать *Истину*. Находится она в точке, расстояние до которой D см. Таракан может делать шаги, каждый длиной не более 1 см, и после каждого шага ему говорят, приблизился он к *Истине* или нет. Таракан может помнить всё, в частности направление своих шагов. Доказать, что он сможет отыскать *Истину*, сделав не более $\frac{3}{2}D + 7$ шагов.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Масса каждой из 19 гирь не больше 70 г и равна целому числу граммов. Доказать, что из этих гирь нельзя составить более 1230 различных по массе наборов.

Реш **1**.

З-ча **2**. В угол ABC вписаны две непересекающиеся окружности O_1 и O_2. M — точка касания O_1 с BA, P — точка касания O_2 с BC. Доказать, что окружности O_1 и O_2 высекают на прямой MP хорды равной длины.

Реш **2**.

З-ча **3**. У числа 2^{1970} зачеркнули его первую цифру и прибавили ее к оставшемуся числу. С результатом проделали ту же операцию и т.д., до тех пор пока не получили 10-значное число. Доказать, что в этом числе есть две одинаковые цифры.

Реш **3**.

З-ча **4**. На плоскости даны 200 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Можно ли занумеровать эти точки номерами от 1 до 200 так, чтобы все сто прямых, проходящих через точки с номерами 1 и 101, 2 и 102, ..., 100 и 200, попарно пересекались?

Реш **4**.

З-ча **5**. В некоторых клетках таблицы 100×100 стоят крестики. Известно, что в каждой строке стоит хотя бы один крестик и в каждом столбце тоже. Доказать, что можно отметить 10 строк и 10 столбцов так, что если стереть все крестики в отмеченных столбцах и строках, то в каждой неотмеченной строке останется хотя бы один крестик и в каждом столбце тоже.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Доказать, что если целое положительное число k делится на 999 999 999 (9 девяток), то в его десятичной записи более 8 цифр отличны от нуля.

Реш **1**.

З-ча **2**. На окружности радиуса 1 отмечено 100 точек. Доказать, что на этой окружности можно найти такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до всех отмеченных точек была больше 100.

Реш **2**.

З-ча **3**. В парке шесть узких аллей одинаковой длины, четыре из которых идут по сторонам квадрата и две по его средним линиям. По этим аллеям мальчик Коля убегает от папы и мамы. Смогут ли папа и мама поймать Колю, если он бегает **втрое** быстрее их (все трое всё время видят друг друга)?

Реш **3**.

З-ча **4**. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Один из полученных трёх листов бумаги снова разрезают по прямой на две части и т. д. Какое bfнаименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы получить 73 тридцатиугольника?

Реш **4**.

З-ча **5**. Король Людовик не доверяет некоторым своим придворным. Он составил полный список придворных и приказал каждому из них следить за одним из остальных. При этом первый придворный следит за тем, кто следит за вторым, второй следит за тем, кто следит за третьим, и т.д., предпоследний следит за тем, кто следит за последним, последний следит за тем, кто следит за первым. Доказать, что у Людовика нечётное число придворных.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Внутри круга радиуса 1 м расположены n точек. Доказать, что в круге или на его границе существует точка, сумма расстояний от которой до всех точек не меньше n метров.

Реш **1**.

З-ча **2**. В маленьком зоопарке из клетки убежала обезьяна. Её ловят два сторожа. И сторожа, и обезьяна бегают только по дорожкам. Всего в зоопарке 6 прямолинейных дорожек: 3 длинные образуют правильный треугольник, 3 короткие соединяют середины его сторон. В каждый момент времени обезьяна и сторожа видят друг друга. Смогут ли сторожа поймать обезьяну, если обезьяна бегает **в три раза быстрее** сторожей? (Вначале оба сторожа находятся в одной вершине треугольника, а обезьяна в другой.)

Реш **2**.

З-ча **3**. На участке земли квадратно-гнездовым способом посажено 10 000 деревьев: 100 рядов по 100 деревьев. Какое наибольшее число деревьев можно срубить, чтобы выполнялось следующее условие: если встать на любой пень, то за деревьями не будет видно ни одного другого пня? Деревья считать достаточно тонкими.

Реш **3**.

З-ча **4**. На ленте записаны подряд 80 ненулевых цифр. Разрезаем ленту на несколько кусков, длина каждого из которых больше, чем одна цифра. Числа, получившиеся на кусках, складываем. Доказать, что имеется по крайней мере два различных способа разрезания ленты, при которых получаются одинаковые суммы.

Реш **4**.

З-ча **5**. Плоский коридор шириной 1 м имеет форму буквы «Г» и бесконечен в обе стороны. Необходимо изготовить плоский кусок несгибаемой проволоки — не обязательно прямой — такой, чтобы его можно было протащить по всему коридору. Доказать, что если проволока имеет форму ломаной и расстояние между её концами больше $(2 + 2\sqrt{2})$ м, то по всему коридору её протащить нельзя.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. N деталей полотна игрушечной железной дороги имеют форму четверти окружности радиуса 10 см. Доказать, что, последовательно присоединяя их концами так, чтобы они плавно переходили друг в друга, нельзя составить такой путь, чтобы его начало совпадало с концом, а первое и последнее звенья образовывали бы нулевой угол (рис.???).

Реш **1**.

З-ча **2**. Плоский коридор шириной 1 м имеет форму буквы «Г» и бесконечен в обе стороны. Необходимо изготовить плоский кусок несгибаемой проволоки — не обязательно прямой — такой, чтобы его можно было протащить по всему коридору. Каково максимальное возможное расстояние между концами проволоки?

Реш **2**.

З-ча **3**. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знаки во всех клетках одной строки или же во всех клетках одного столбца. Можно ли, пользуясь только этими операциями, получить 1970 минусов?

Реш **3**.

З-ча **4**. Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Один из полученных трёх листов бумаги снова разрезают по прямой на две части и т. д. Какое bfнаименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы получить сто 20-угольников?

Реш **4**.

З-ча **5**. По рёбрам прозрачного куба ползают три паука и муха. Наибольшая скорость мухи в **три** раза больше наибольшей скорости пауков. Вначале пауки находились в одной вершине куба, муха — в противоположной. Смогут ли пауки поймать муху? (Пауки и муха всё время видят друг друга.)

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Около сферы радиуса 10 описан некоторый 19-гранник. Доказать, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что если целое положительно число k делится на 10 101 010 101, то в его десятичной записи по крайней мере 6 цифр отличны от нуля.

Реш **2**.

З-ча **3**. По рёбрам прозрачного куба ползают два паука и муха. Максимальные скорости паука и мухи совпадают. Вначале пауки находились в одной вершине куба, муха — в противоположной. Смогут ли пауки поймать муху? (Пауки и муха всё время видят друг друга.)

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеется натуральное число $n > 1970$. Возьмём остатки от деления числа 2^n на $2, 3, 4, \ldots, n$. Доказать, что сумма этих остатков больше $2n$.

Реш **4**.

З-ча **5**. У Мерлина есть две таблицы 100×100; одна из них пустая, а на другой, волшебной, написаны какие-то числа. Первая таблица прибита к скале у входа в пещеру, а вторая — к стене внутри пещеры. Вы можете обвести на первой таблице какой-нибудь квадрат (размером 1×1, 2×2, ... или 100×100), расположенном в любом месте таблицы, и за шиллинг узнать у Мерлина сумму чисел, стоящих в клетках соответствующего квадрата на волшебной таблице. Какое наименьшее количество денег потребуется, чтобы узнать сумму чисел на диагонали волшебной таблицы?

Реш **5**.

Дополнительный тур. День Пифагора

7 класс

З-ча **1**. Число $1234567\ldots1000$ умножили на какое-то целое число от 1 до 9 и вычеркнули из произведения все единицы. Оставшееся после этого число опять умножили на однозначное число и вычеркнули все единицы и так проделали много раз. Какое наименьшее число удастся таким образом получить?

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется зал размером 13×13 м, разбитый на метровые квадраты. Разрешается класть прямоугольные ковры произвольных размеров так, чтобы их стороны шли по сторонам решётки (в частности, по границе зала). Можно класть ковры так, чтобы они частично перекрывались и даже чтобы некоторые из них полностью перекрывались остальными, но не допускается, чтобы один ковёр полностью лежал на другом или под другим (даже если между ними имеются ещё ковры). Какое наибольшее количество ковров вы можете положить, чтобы эти условия выполнялись?

Реш **2**.

З-ча **3**. При обычной игре в домино кости выкладываются так, чтобы разность между числами на соседних костях равнялась 0. Можно ли выложить все 28 костей в замкнутую цепь так, чтобы все эти разности равнялись ± 1?

Реш **3**.

З-ча **4**. Можно ли разбить числа $1, 2, 3, \ldots, 33$ на 11 групп, по 3 числа в каждой, так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме двух других?

Реш **4**.

З-ча **5**. Али-Баба пытается проникнуть в пещеру. У входа в неё стоит барабан с четырьмя отверстиями по бокам. Около каждого отверстия внутри поставлен переключатель, имеющий два положения: «верх», «низ». Разрешается засунуть руки в какие-либо 2 отверстия, пощупать, как стоят переключатели, и переключить их произвольным образом (в частности, можно не переключать). После этого барабан приходит в быстрое вращение, так что после его остановки уже нельзя установить, какие именно переключатели трогали в прошлый раз. Разрешается повторить эту операцию до 10 раз. Дверь в пещеру открывается в тот момент, когда все переключатели стоят одинаково. Доказать, что Али-Баба сумеет попасть в пещеру.

Реш **5**.

З-ча **6**. Известно, что в кадр фотоаппарата, расположенного в точке O, не могут попасть предметы A и B такие, что угол AOB больше $179°$. На плоскости поставлено 1000 таких фотоаппаратов. Одновременно каждым фотоаппаратом делают по одному снимку. Доказать, что найдётся снимок, на котором сфотографировано не больше 998 фотоаппаратов.

Реш **6**.

XXXIV олимпиада (1971)

Первый тур

8 класс

З-ча **1**. Город обнесён стеной, имеющей форму 1000-угольника (несамопересекающегося, но не обязательно выпуклого). На каждом углу с внешней стороны стоит часовой. Доказать, что найдётся часовой, который видит менее пятисот других часовых.

Реш **1**.

З-ча **2**. Окружность пересекается с выпуклым пятиугольником $ABCDE$ в точках A_1, A_2, B_1, B_2, $\ldots$, E_1, E_2 (рис.???). Известно, что $AA_1 = AA_2$, $BB_1 = BB_2$, $CC_1 = CC_2$, $DD_1 = DD_2$. Доказать, что $EE_1 = EE_2$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Во всесоюзном футбольном турнире участвовало 25 команд. После окончания турнира оказалось, что ни в одной встрече ни одна из команд не забила в ворота противника более четырёх мячей. Какое самое низкое место в турнирной таблице могла занять команда города Тбилиси, забившая мячей больше, чем любая другая команда, и пропустившая меньше любой другой команды?

Реш **3**.

З-ча **4**. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 100×100 клеток. Внутри каждой клетки поставили красную или синюю точку, так что в каждом столбце оказалось 50 синих и 50 красных точек и в каждой строке оказалось 50 синих и 50 красных точек. Соединим каждые две красные точки, расположенные в соседних квадратах (имеющих общую сторону), красным отрезком, а каждые две синие точки в соседних квадратах — синим отрезком. Доказать, что красных отрезков получится столько же, сколько и синих.

Реш **4**.

З-ча **5**. Обозначим количество цифр в числе A через $k(A)$. Доказать, что число $k(5^{1090701}) - k(2^{1090701})$ делится на 2.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. В вершинах правильного 25-угольника расположены числа a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{25}, причём $a_1 = a_2 = \cdots = a_{13} = 1$, $a_{14} = a_{15} = \cdots = a_{25} = -1$. Над этими числами произвели следующую операцию: к каждому числу прибавили ближайшее к нему число по часовой стрелке. Например, к a_7 прибавили a_8, к a_{25} прибавили a_1. Полученные числа b_1, b_2, $\ldots$, b_{25} расставили в вершинах вместо чисел a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{25} в том же порядке и произвели над ними ту же операцию и т.д. Всего эту операцию проделали 100 раз. Доказать, что одно из полученных чисел будет больше 10^{20}.

Реш **1**.

З-ча **2**. Пусть задан выпуклый k-угольник P $(k > 6)$, периметр которого равен 2. Построим новый выпуклый k-угольник M, вершины которого являются серединами сторон k-угольника P. Доказать, что периметр многоугольника M больше 1.

Реш **2**.

З-ча **3**. На плоскости проведено n прямых $(n > 2)$, причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что можно повернуть плоскость вокруг некоторой точки O на некоторый угол $\alpha < 180°$ так, что каждая из проведённых прямых совместится с какой-нибудь другой проведённой прямой. Указать все числа n, для которых это возможно.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дано число 2^k, где k — натуральное число, большее 3. Доказать, что никакое число, полученное из данного перестановкой его цифр, не равно 2^n, где n — любое натуральное число, большее k.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что среди чисел $[2^k \cdot \sqrt{2}]$ бесконечно много составных.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Дана замкнутая пространственная ломаная с вершинами A_1, A_2, $\ldots$, A_n, причём каждое звено пересекает фиксированную сферу в двух точках, а все вершины ломаной лежат вне сферы. Эти точки делят ломаную на $3n$ отрезков. Известно, что отрезки, прилегающие к вершине A_1, равны между собой.

То же самое верно и для вершин A_2, A_3, ..., A_{n-1}. Доказать, что отрезки, прилегающие к вершине A_n, также равны между собой.

Реш **1**.

З-ча **2**. У Пети имеется набор «Юный паркетчик», который состоит из дощечек, уложенных в один слой в прямоугольную коробку так, что они покрывают всю её площадь. Каждая дощечка имеет площадь 3 см^2 и имеет форму либо прямоугольника, либо уголка (рис.???). Петя сказал, что он потерял дощечку в форме уголка, сделал вместо неё прямоугольную дощечку и уложил после этого все дощечки вместе с новой в один слой в коробку. Можно ли утверждать, что он лжёт?

Реш **2**.

З-ча **3**. Про последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ известно, что для любого $n > 1$ выполнено равенство $3x_n - x_{n-1} = n$. Кроме того, известно, что $|x_1| < 1971$. Вычислить x_{1971} с точностью до $0,000001$.

Реш **3**.

З-ча **4**. n точек расположены в вершинах выпуклого n-угольника. Внутри этого n-угольника отметили k точек. Оказалось, что любые три из $n + k$ точек не лежат на одной прямой и являются вершинами равнобедренного треугольника. Чему может быть равно число k?

Реш **4**.

З-ча **5**. Лежит кучка в 10 миллионов спичек. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может взять из кучки спички в количестве p^n, где p — простое число, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (например, первый берёт 25 спичек, второй — 8, первый — 1, второй — 5, первый — 49 и т.д.). Выигрывает тот, кто берёт последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре?

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Существует ли число, квадрат которого начинается с цифр 123456789 и кончается цифрами 987654321?

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан квадрат $ABCD$ и точка O внутри. Из точек A, B, C, D опускаются перпендикуляры AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 соответственно на прямые BO, CO, DO, AO. Доказать, что прямые, на которых лежат эти перпендикуляры, пересекаются в одной точке.

Реш **2**.

З-ча **3**. В колбе находится колония из n бактерий. В какой-то момент внутрь колбы попадает вирус. В первую минуту вирус уничтожает одну бактерию, и сразу же после этого и вирус, и оставшиеся бактерии делятся пополам. Во вторую минуту новые два вируса уничтожают две бактерии, а затем и вирусы, и оставшиеся бактерии снова делятся пополам, и т.д. Наступит ли такой момент времени, когда не останется ни одной бактерии?

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеется сетка, состоящая из квадратов размером 1×1. Каждый её узел покрашен в один из четырёх данных цветов так, что вершины любого квадрата 1×1 покрашены в разные цвета. Доказать, что найдётся прямая, принадлежащая сетке, такая, что узлы, лежащие на ней, покрашены в два цвета.

Реш **4**.

З-ча **5**. На плоскости расположены 7 точечных прожекторов. Каждый прожектор освещает угол в 90°. Если в квадранте, освещённом каким-либо прожектором, окажется другой прожектор, то от последнего упадёт тень — тёмный бесконечный луч. Доказать, что эти 7 прожекторов можно расположить так, что от каждого из них будет падать тень длиной 7 км.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Дано 29-значное число $X = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_{28}a_{29}}$ ($0 \leqslant a_k \leqslant 9$, $a_1 \neq 0$). Известно, что для всякого k цифра a_k встречается в записи данного числа a_{30-k} раз (например, если $a_{10} = 7$, то цифра a_{20} встречается 7 раз). Найти сумму цифр числа X.

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется картонный 1000-угольник (не обязательно выпуклый). Этот многоугольник разрезали по прямой линии один раз. Он распался при этом на несколько новых многоугольников. Какое наибольшее число треугольников могло получиться среди этих многоугольников?

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что сумма цифр числа K не более чем в 8 раз превосходит сумму цифр числа $8K$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Разрешается взять любое число, состоящее из нулей и четвёрок, и проделать с ним следующие операции: поделить на 2, на 3 или на 5, если это деление возможно нацело, или же вставить 0 или 4 между цифрами этого числа, или приписать 0 или 4 к числу с любой стороны (справа или слева). С полученным числом можно проделывать те же операции и т.д. Можно ли таким способом получить любое натуральное число?

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Дан выпуклый 1971-угольник. Из каждой его вершины A_n каждая его сторона, не проходящая через A_n, видна под одним и тем же углом α_n. Доказать, что многоугольник правильный.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 1 для 8 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. Можно ли каждую сторону квадрата так разделить на 100 частей, чтобы из полученных 400 отрезков нельзя было бы составить контура никакого прямоугольника, отличного от исходного квадрата?

Реш **3**.

З-ча **4**. Окружность разделена на n равных частей, и в точках деления написаны числа x_1, x_2, ..., x_n, равные $+1$ или -1. Если повернуть окружность на угол $k \cdot \frac{360^\circ}{n}$, перемножить числа в совместившихся точках и сложить полученные n произведений, то для всякого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ эта сумма будет равной 0. Доказать, что число n является точным квадратом целого числа.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что можно расставить в вершинах правильного n-угольника действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, все отличные от 0, так, чтобы для любого правильного k-угольника, все вершины которого являются вершинами исходного n-угольника, сумма чисел, стоящих в его вершинах, равнялась 0.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Окружность разделена на n равных частей, и в точках деления написаны числа x_1, x_2, ..., x_n, равные $+1$ или -1. Если повернуть окружность на угол $k \cdot \frac{360^\circ}{n}$, перемножить числа в совместившихся точках и сложить полученные n произведений, то для всякого $k = 0, 1, \ldots, n-1$ эта сумма будет равной 0. Доказать, что число n является точным квадратом целого числа. Чему может равняться число n?

Реш **1**.

З-ча **2**. Даны два набора чисел: $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$. Расположим числа a_k в возрастающем порядке, а числа b_k — в убывающем порядке. Получатся наборы $a_1^* \leqslant \ldots \leqslant a_n^*$, $b_1^* \geqslant \ldots \geqslant b_n^*$. Доказать, что $max(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \geqslant max(a_1^* + b_1^*, \ldots, a_n^* + b_n^*)$.

Реш **2**.

З-ча **3**. *Банкир* и *Игрок* играют в следующую игру. *Банкир* называет 1000-значное число A_1. *Игрок*, узнав это число, предлагает *Банкиру* произвольное число B_1. После этого *Банкир* по своему усмотрению вычитает из большего числа меньшее или складывает их, а результат сообщает *Игроку* — это число A_2. Затем *Игрок* предлагает *Банкиру* следующее число B_2. *Банкир* повторяет ту же операцию с числами A_2 и B_2 и т.д. Игра кончается, если у *Банкира* оказывается одно из следующих чисел: 1, 10, 100, 1000, ... Доказать, что *Игрок* всегда может закончить игру, предложив *Банкиру* не более 20 своих чисел.

Реш **3**.

З-ча **4**. В пространстве даны точка O и n попарно непараллельных прямых. Точка O ортогонально проектируется на все данные прямые. Каждая из получившихся точек снова проектируется на все данные прямые и т.д. Существует ли шар, содержащий все точки, которые могут быть получены таким образом?

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что сумма цифр числа N превосходит сумму цифр числа $5^5 \cdot N$ не более чем в 5 раз.

Реш **5**.

XXXV олимпиада (1972)

Первый тур

7 класс

З-ча **1**. Дано 17 натуральных чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_{17}$. Известно, что $a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = \cdots = a_{16}^{a_{17}} = a_{17}^{a_1}$. Доказать, что $a_1 = a_2 = \cdots = a_{17}$.

Реш **1**.

З-ча **2**. На конгресс приехали 1000 делегатов из разных стран. Каждый делегат знает несколько языков. Известно, что любые трое могут разговаривать между собой без помощи остальных. (При этом, возможно, одному из них придётся переводить разговор двух других.) Доказать, что всех делегатов можно расселить в 500 комнатах так, чтобы в каждой комнате располагались 2 делегата и при этом они могли бы поговорить между собой.

Реш **2**.

З-ча **3**. Каждая вершина правильного 13-угольника покрашена либо в чёрный, либо в белый цвет. Доказать, что существуют три точки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

Реш **3**.

З-ча **4**. В треугольнике ABC проведены медианы AD и BE. Углы CAD и CBE равны $30°$. Доказать, что $AB = BC$.

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. В некоторых клетках квадратной таблицы $n \times n$ стоят звёздочки. Известно, что если вычеркнуть любой набор строк (только не все), то найдётся столбец ровно с одной невычеркнутой звёздочкой. (В частности, если строки совсем не вычёркивать, то столбец ровно с одной звёздочкой существует.) Доказать, что вычеркнуть любой набор столбцов (только не все), то найдётся строка ровно с одной невычеркнутой звёздочкой.

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости лежат две одинаковые фигуры, имеющие форму буквы «Г». Концы коротких палочек у букв «Г» обозначим через A и A'. Длинные палочки разделены на n равных частей точками $a_1, \ldots, a_{n-1}$; $a'_1, \ldots, a'_{n-1}$ (точки деления нумеруются от концов длинных палочек). Проводятся прямые Aa_1, Aa_2, $\ldots$, Aa_{n-1}; $A'a'_1$, $A'a'_2$, $\ldots$, $A'a'_{n-1}$. Точку пересечения прямых Aa_1 и $A'a'_1$ обозначим через X_1, прямых Aa_2 и $A'a'_2$ — через X_2 и т.д. Доказать, что точки X_1, X_2, $\ldots$, X_{n-1} образуют выпуклый многоугольник.

Реш **2**.

З-ча **3**. Имеется 1000 монет, среди них 0, 1 или 2 фальшивые. Известно, что фальшивые монеты имеют одинаковую массу, отличную от массы нефальшивых монет. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь определить, есть ли фальшивые монеты и легче они или тяжелее нормальных? (Количество монет определять не надо.)

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеется набор натуральных чисел, причём сумма любых семи из них меньше 15, а сумма всех чисел из набора равна 100. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе?

Реш **4**.

З-ча **5**. В треугольнике ABC проведены медианы AD и BE. Углы CAD и CBE равны $30°$. Доказать, что треугольник ABC правильный.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. В треугольнике ABC угол C тупой. На стороне AB отмечены точки E и H, на сторонах AC и BC — точки K и M соответственно. Оказалось, что $AH = AC$, $EB = BC$, $AE = AK$, $BH = BM$. Доказать, что точки E, H, K, M лежат на одной окружности.

Реш **1**.

З-ча **2**. В клетках шахматной доски размером $n \times n$ расставлены числа: на пересечении k-й строки и m-го столбца стоит число a_{km}. При любой расстановке на этой доске n ладей, при которой никакие две из них не бьют друг друга, сумма закрытых чисел равна 1972. Доказать, что существует два набора чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$, что при всех k и m выполняется равенство $a_{km} = x_k + y_m$.

Реш **2**.

З-ча **3**. В некотором лесу расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Все деревья имеют высоту не более 100 м. Доказать, что лес можно обнести забором длиной 200 м.

Реш **3**.

З-ча **4**. Натуральные числа m и n взаимно просты и $n < m$. Какое число больше: $\left[1 \cdot \frac{m}{n}\right] + \left[2 \cdot \frac{m}{n}\right] + \cdots + \left[n \cdot \frac{m}{n}\right]$ или $\left[1 \cdot \frac{n}{m}\right] + \left[2 \cdot \frac{n}{m}\right] + \cdots + \left[m \cdot \frac{n}{m}\right]$?

Реш **4**.

З-ча **5**. Город X состоит из 10 бесконечных параллельных проспектов, пересекающих через равные интервалы поперечные улицы. Два полицейских, двигаясь вдоль проспектов и улиц, пытаются обнаружить гангстера, который может прятаться за домами. Если гангстер окажется на одном проспекте или на одной улице с каким-либо полицейским, он будет обнаружен. Скорость гангстера не более чем в 10 раз превышает скорость полицейских, причём полицейским известно, что он в начальный момент времени находился от них на расстоянии не более 100 кварталов. Доказать, что полицейские смогут обнаружить гангстера.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В городе «Многообразие» живут n жителей, любые два из которых либо дружат, либо враждуют между собой. Каждый день не более чем один житель может начать новую жизнь: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Доказать, что все жители могут подружиться. (*Примечание.* Если A — друг B, а B — друг C, то A — также друг C.)

Реш **1**.

З-ча **2**. Дана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, причём каждое следующее число получено из предыдущего приписыванием справа любой цифры, кроме 9. Известно, что a_1 — произвольное десятизначное число. Доказать, что в этой последовательности не менее двух составных чисел.

Реш **2**.

З-ча **3**. У тетраэдра $ABCD$ все двугранные углы острые, а противоположные рёбра попарно равны. Найти сумму косинусов всех двугранных углов тетраэдра.

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеется несамопересекающийся невыпуклый n-угольник P. Рассмотрим множество T его внутренних точек, из которых видны все вершины P. Доказать, что T — выпуклый многоугольник, число сторон которого не больше n.

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точка пересечения диагоналей обозначена через O. Известно, что периметры треугольников ABO, BCO, CDO, ADO равны между собой. Доказать, что $ABCD$ — ромб.

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости проведены четыре прямые a, b, c, d. Никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Известно, что прямая a параллельна одной из медиан треугольника, образованного прямыми b, c, d. Доказать, что прямая b параллельна некоторой медиане треугольника, образованного прямыми a, c и d.

Реш **2**.

З-ча **3**. Даны 12 последовательных натуральных чисел. Доказать, что хотя бы одно из них меньше суммы своих делителей.

Реш **3**.

З-ча **4**. В стране Мара расположено несколько замков. Из каждого замка ведут три дороги. Из какого-то замка выехал рыцарь. Странствуя по дорогам, он из каждого замка, стоящего на его пути, поворачивает либо направо, либо налево по отношению к дороге, по которой приехал. Рыцарь никогда не сворачивает в ту сторону, в которую он свернул перед этим. Доказать, что когда-нибудь он вернётся в исходный замок.

Реш **4**.

З-ча **5**. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K. Известно, что площадь треугольника MBK равна площади четырёхугольника $AMKC$. Доказать, что

$$\frac{MB+BK}{AM+CA+KC} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Числа a, b, c, d, e и f — натуральные. Известно, что $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{e}{f} >$, $af - be = 1$. Доказать, что $d \geqslant b + f$.

Реш **2**.

З-ча **3**. В городе *Никитовка* двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в любой момент ремонта можно проехать из любой точки города в любую другую. Доказать, что в *Никитовке* можно ввести одностороннее движение так, что из любой точки города удастся проехать в любую другую точку.

Реш **3**.

З-ча **4**. Пусть $K(x)$ равно числу несократимых дробей $\frac{a}{b}$ таких, что $a < x$ и $b < x$ (a и b — натуральные числа). Например, $K(\frac{5}{2}) = 3$ (дроби 1; 2; $\frac{1}{2}$). Вычислить сумму

$$K(100) + K(\frac{100}{2}) + K(\frac{100}{3}) + \cdots + K(\frac{100}{99}) + K(\frac{100}{100}).$$

Реш **4**.

З-ча **5**. На плоскости проведено 300 прямых, причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезана на куски. Доказать, что среди кусков найдётся не менее 100 треугольников.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. В пятиугольнике длины всех сторон равны между собой, а величины всех углов меньше 120°. Доказать, что все углы пятиугольника тупые.

Реш **1**.

З-ча **2**. См задачу 2 для 8 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. Улицы города «М» представляют собой правильную квадратную сетку размером 20×20 кварталов. На некоторых перекрёстках имеются станции метро. Известно, что, выйдя на улицу в любом месте, можно добраться до метро, пройдя не более двух кварталов по улице. Какое наименьшее число станций могло быть в городе «М»?

Реш **3**.

З-ча **4**. Существуют ли рациональные числа a, b, c, d, удовлетворяющие равенству

$$(a + b\sqrt{2})^{2n} + (c + d\sqrt{2})^{2n} = 5 + 4\sqrt{2}$$

(где n — натуральное число)?

Реш **4**.

З-ча **5**. На плоскости проведено 3000 прямых, причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезана на куски. Доказать, что среди кусков найдётся не менее: а) 1000 треугольников, б) 2000 треугольников.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. В пространстве расположены плоскость П и треугольник ABC, не принадлежащий этой плоскости. Треугольник $A_1B_1C_1$ является прямоугольной проекцией треугольника ABC на плоскость П. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ может быть накрыт полностью треугольником, равным треугольнику ABC.

Реш **1**.

З-ча **2**. Даны два набора чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Известно, что: а) $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 0$, $y_1 > y_2 > \cdots > y_n > 0$; б) $x_1 > y_1$, $x_1 + x_2 > y_1 + y_2$, $\ldots$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > y_1 + y_2 + \cdots + y_n$.

Доказать, что для любого натурального k справедливо неравенство $x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k > y_1^k + y_2^k + \cdots + y_n^k$.

Реш **2**.

З-ча **3**. На четырёхстах карточках написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 400$. Игроки A и B играют в следующую игру: первым ходом A берёт себе любые 200 карточек, а остальные отдаёт B. Затем B берёт 100 карточек из каждого набора, а остальные отдаёт A; таким образом, у обоих игроков оказалось по 200 карточек. Следующим ходом A снова берёт по 100 карточек из каждого набора, а остальные отдаёт B и т.д. После 200-го хода игрока B оба подсчитывают сумму чисел на своих карточках: C_A и C_B — и A выплачивает игроку B разность $C_B - C_A$. Какую максимальную сумму может получить игрок B при правильной игре обоих?

Реш **3**.

З-ча **4**. Рассмотрим все рациональные числа между нулём и единицей, знаменатели которых не превосходят n. Расположим их в порядке возрастания. Пусть $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$ — какие-то два соседних числа (дроби несократимы). Доказать, что $|bc - ad| = 1$.

Реш **4**.

З-ча **5**. На всех клетках шахматной доски 8×8 расставлены натуральные числа. Разрешается выделить любой квадрат размером 3×3 или 4×4 и увеличить все числа в нём на 1. Мы хотим в результате нескольких таких операций добиться, чтобы числа во всех клетках делились на 10. Всегда ли это удастся сделать?

Реш **5**.

XXXVI олимпиада (1973)

Первый тур

8 класс

З-ча **1**. На квадратном острове расположено несколько стран. Можно ли разбить эти страны на меньшие так, чтобы не появилось новых точек, где пересекаются границы, и чтобы можно было раскрасить карту этого острова в два цвета (страны, имеющие общий участок границы, должны быть раскрашены в разные цвета).

Реш **1**.

З-ча **2**. Может ли число, состоящее из шестисот шестерок и некоторого количества нулей, быть квадратом целого числа?

Реш **2**.

З-ча **3**. Пусть на плоскости есть пять точек общего положения, то есть никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие четыре — на одной окружности. Докажите, что среди этих точек есть две такие, что они лежат по разные стороны от окружности, проходящей через оставшиеся три точки.

Реш **3**.

З-ча **4**. Рассматриваются решения уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ $(p>1)$, где x, y и p — натуральные числа (решением называется пара натуральных чисел x и y, обращающая это уравнение в верное равенство). Докажите, что если p — простое число, то уравнение имеет ровно три решения; если p — составное, то решений больше трех ($x=a$, $y=b$ и $x=b$, $y=a$ — различные решения, если $a\neq b$).

Реш **4**.

З-ча **5**. «Чехарда». В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду, т.е. прыгают друг через друга. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается от B на том же расстоянии, что и до прыжка, и, естественно, на той же прямой. Может ли один из них попасть в четвертую вершину квадрата?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Доказать, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

Реш **1**.

З-ча **2**. Квадрат разбит на выпуклые многоугольники. Доказать, что их можно разбить на меньшие выпуклые многоугольники так, чтобы в новом разбиении квадрата каждый многоугольник граничил с нечетным числом соседей. (Соседи — многоугольники с общей стороной).

Реш **2**.

З-ча **3**. Дан многочлен с целыми коэффициентами. В трех целых точках он принимает значение два. Доказать, что ни в какой целой точке он не принимает значение три.

Реш **3**.

З-ча **4**. В городе N с любой станции метро на любую другую можно проехать. Доказать, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы с любой из оставшихся станций можно было по-прежнему проехать на любую другую.

Реш **4**.

З-ча **5**. Грани кубика занумерованы $1,2,3,4,5,6$, так, что сумма номеров на противоположных гранях кубика равна 7. Дана шахматная доска 50×50 клеток, каждая клетка равна грани кубика. Кубик перекатывается из левого нижнего угла доски в правый верхний. При перекатывании он каждый раз переваливается через свое ребро на соседнюю клетку, при этом разрешается двигаться только вправо или вверх (нельзя двигаться влево или вниз). На каждой из клеток на пути кубика имеется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех написанных чисел? Какое наименьшее значение она может принимать?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. С натуральным числом K производится следующая операция: оно представляется в виде произведения простых сомножителей $K = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n$; затем вычисляется сумма $p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1$.

С полученным числом производится то же самое, и т.д. Доказать, что образующаяся последовательность, начиная с некоторого номера, будет периодической.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 1 для 9 класса

З-ча **3**. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при некоторых целых x принимает значения 1, 2 и 3. Доказать, что существует не более одного целого x, при котором значение этого многочлена равно 5.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что у всякого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

Реш **4**.

З-ча **5**. На черном ящике находится табло с K лампочками и пульт из K переключателей на два положения (тумблеров). При переборе возможных состояний пульта на табло последовательно загораются все возможные комбинации лампочек. Состояние табло однозначно определяет состояние пульта. Известно, что всегда при переключении одного тумблера гаснет или загорается ровно одна лампочка. Доказать, что состояние каждой лампочки зависит от положения ровно одного переключателя (для каждой лампочки своего).

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Из некоторого четырехзначного числа вычли другое, числа составленное из тех же цифр, но расположенных в обратном порядке. Может ли получиться число 1008?

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан остроугольный треугольник ABC. Его покрывают тремя кругами, центры которых лежат в вершинах, а радиусы равны высотам, проведенным из этих вершин. Доказать, что каждая точка треугольника покрыта хотя бы одним из кругов.

Реш **2**.

З-ча **3**. Лист клетчатой бумаги размером 100×100 раскрасили в 100 цветов. (Каждую клеточку закрасили одним из 100 цветов или не закрасили вообще). «Правильной» раскраской называется такая, что в каждом столбце и в каждой строке нет двух клеточек одинакового цвета. Можно ли докрасить лист «правильным» способом, если первоначально были «правильно» закрашены

а) $100^2 - 1$ клеток?

б) $100^2 - 2$ клеток?

в) 100 клеток?

Реш **3**.

З-ча **4**. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из его вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость полицейского вдвое меньше максимальной скорости гангстера. Доказать, что полицейский может бежать так, что в какой-то момент окажется на одной стороне с гангстером.

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее и наибольшее расстояние до границы кляксы. Среди всех наименьших расстояний выбрали наибольшее, а среди наибольших выбрали наименьшее и сравнили полученные два числа. Какую форму имеет клякса, если эти два числа равны между собой?

Реш **1**.

З-ча **2**. Лист клетчатой бумаги размером $N \times N$ раскрасили в N цветов. (Каждую клеточку закрасили одним из этих N цветов или не закрасили вообще). «Правильной» раскраской называется такая, что в каждом столбце и в каждой строке нет двух клеточек одинакового цвета. Можно ли докрасить лист «правильным» способом, если сначала было «правильно» закрашено

а) N^2-1 клетка?

б) N^2-2 клетки?

в) N клеток?

Реш **2**.

З-ча **3**. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из его вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что отношение максимальной скорости полицейского и максимальной скорости гангстера равно: $a)$ $0,5$; $b)$ $0,49$; $c)0,34$; $c)$ $\frac{1}{3}$. Доказать, что полицейский может бежать так, что в какой-то момент окажется на одной стороне с гангстером.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что в выпуклый равносторониий (но не обязательно правильный) пятиугольник можно поместить правильный треугольник так, что одна из его сторон будет совпадать со стороной пятиугольника, а весь треугольник будет лежать внутри этого пятиугольника.

Реш **4**.

9 класс

З-ча **1**. Имеется 100-значное число, состоящее из единиц и двоек. Разрешается в любых десяти последовательных цифрах поменять местами первые пять с пятью следующими. Два таких числа называются похожими, если одно из них получается из другого несколькими такими операциями. Какое наибольшее количество попарно непохожих чисел можно выбрать?

Реш **1**.

З-ча **2**. На бесконечной шахматной доске проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная, проходящая по сторонам клеток. Внутри ломаной оказалось K черных клеток. Какую наибольшую площадь может иметь фигура, онграниченная этой ломаной?

Реш **2**.

З-ча **3**. Дано число $A=\left(\frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}\right)^5$, где M — натуральное число большее 2. Доказать, что найдется такое натуральное k, что

$$A=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

Реш **3**.

З-ча **4**. На концах отрезка стоят по единице. Первым шагом между этими единицами ставится их сумма — число 2. Следующим шагом между каждыми двумя соседними числами ставится их сумма и т.д. 1 000 000 раз. (На втором шаге получается последовательность 1 3 2 3 1) Сколько раз будет написано число 1973?

Реш **4**.

З-ча **5**. В центре квадрата находится полицейский, а в одной из его вершин — гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер — только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость гангстера равна $2,9$ максимальной скорости полицейского.Полицейский хочет оказаться вместе с гангстером на одной стороне квадрата. Всегда ли он сможет этого добиться?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Дано число $A=\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m$, где n и m — натуральные числа. Доказать, что существует такое натуральное k, что

$$A=\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. У трехгранного угла проведены бисектрисы плоских углов. Доказать, что попарные углы между биссектрисами либо одновременно тупые, либо одновременно прямые, либо одновременно острые.

Реш **2**.

З-ча **3**. 12 маляров живут в 12 красных и белых домах, расположенных по кольцевой дороге. Каждый месяц один из маляров, взяв с собой достаточное количество белой и красной краски, выходит из дома и идет вдоль кольцевой дороги по часовой стрелке. Увидев красный дом, он красит его в белый цвет и идет дальше, а увидев белый дом, он перекрашивает его в красный и идет домой мыть кисти. В течение года каждый маляр ровно один раз проделывает такое путешествие. Доказать, что в конце года каждый дом будет покрашен в первоначальный цвет, если в начале года хотя бы один дом был красным.

Реш **3**.

З-ча **4**. В последовательности, состоящей из нулей и единиц, разрешается переставлять произвольные два рядом стоящие куска последовательности длины 5 каждый. Две последовательности будут называться подобными, если из одной из них конечным числом таких преобразований можно получить другую. Сколько существует неподобных между собой последовательностей длины 100?

Реш **4**.

З-ча **5**. На арене круглого цирка радиуса 10 метров бегает лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 километров. Доказать, что сумма всех углов, на которые лев поворачивал, не меньше 2998 радиан.

Реш **5**.

XXXVII олимпиада (1974)

Первый тур

9 класс

З-ча **1**. Доказать, что число $100\ldots001$, в котором $2^{1974}+2^{1000}-1$ нулей, составное.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что в круг радиуса 1 нельзя поместить без наложений два треугольника, площадь каждого из которых больше 1.

Реш **2**.

З-ча **3**. Две одинаковые шестерёнки имеют по 32 зубца. Их совместили и спилили одновременно 6 пар зубцов. Доказать, что одну шестерёнку можно повернуть относительно другой так, что в местах сломанных зубцов одной шестерёнки окажутся целые зубцы второй шестерёнки.

Реш **3**.

З-ча **4**. Из отрезков, имеющих длины a, b и c, можно составить треугольник. Доказать, что из отрезков с длинами $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+b}$ также можно составить треугольник.

Реш **4**.

З-ча **5**. Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все прямые, на которых лежат его стороны, параллельно перенести на расстояние 1 во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному, причём параллельные стороны окажутся пропорциональными. Доказать, что в данный многоугольник можно вписать окружность.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 4 для 9 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что для любого 13-угольника найдётся прямая, содержащая ровно одну его сторону, однако при любом $n>13$ существует n-угольник, для которого это неверно.

Реш **2**.

З-ча **3**. Две одинаковые шестерёнки имеют по 92 зубца. Их совместили и спилили одновременно 10 пар зубцов. Доказать, что одну шестерёнку можно повернуть относительно другой так, что в местах сломанных зубцов одной шестерёнки окажутся целые зубцы второй шестерёнки.

Реш **3**.

З-ча **4**. На кубе отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Точка O внутри правильного шестиугольника со стороной 1 соединена со всеми его вершинами. Доказать, что среди треугольников, на которые разбивается шестиугольник, найдутся два таких, что все их стороны будут не меньше 1.

Реш **1**.

З-ча **2**. На прямой расположено 100 точек. Отметим середины всевозможных отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее число отмеченных точек может получиться?

Реш **2**.

З-ча **3**. Сколько сторон может быть у выпуклого многоугольника, все диагонали которого имеют равную длину?

Реш **3**.

З-ча **4**. Несколько стеклянных шариков разложено в три кучки. Мальчик, располагающий неограниченным запасом шариков, может за один ход взять по одному шарику из каждой кучки или же добавить из своего запаса в одну из кучек столько шариков, сколько в ней уже есть. Доказать, что за несколько ходов мальчик может добиться того, что в каждой кучке не останется ни одного шарика.

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 3 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости расположено n точек. Отметим середины всевозможных отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее число отмеченных точек может получиться?

Реш **2**.

З-ча **3**. В клетках прямоугольной таблицы, имеющей 8 строк и 5 столбцов, расставлены натуральные числа. За один ход разрешается одновременно удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Доказать, что за несколько ходов можно добиться того, чтобы все числа таблицы стали равными нулю.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дан выпуклый пятиугольник, все углы которого тупые. Доказать, что в нём найдутся две такие диагонали, что круги, построенные на них как на диаметрах, полностью покроют пятиугольник.

Реш **4**.

З-ча **5**. Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Доказать, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, чтобы любое натуральное число $1, 2, 3, \ldots$ можно было представить единственным способом в виде разности двух чисел этой последовательности?

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что в произвольном $2n$-угольнике найдётся диагональ, не параллельная ни одной из его сторон.

Реш **2**.

З-ча **3**. Имеется несколько гирь, масса каждой из которых равна целому числу. Известно, что их можно разбить на k равных по массе групп. Доказать, что не менее чем k способами можно убрать одну гирю так, чтобы оставшиеся гири нельзя было разбить на k равных по массе групп.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дан треугольник ABC, AD и BE — его биссектрисы. Известно, что $AC > BC$. Доказать, что $AE > DE > BD$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Прямоугольный лист бумаги размером $a \times b$ см разрезан на прямоугольные полоски, каждая из которых имеет сторону 1 см. Линии разрезов параллельны сторонам исходного листа. Доказать, что хотя бы одно из чисел a или b целое.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что в десятчной записи чисел $2^n + 1974^n$ и 1974^n содержится одинаковое количество цифр.

Реш **2**.

З-ча **3**. Шарообразная планета окружена 37-ю точечными астероидами. Доказать, что в любой момент на поверхности планеты найдётся точка, из которой астроном не сможет наблюдать более 17 астероидов. *Примечание.* Астероид, расположенный на линии горизонта, не виден.

Реш **3**.

З-ча **4**. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Реш **5**.

XXXVII олимпиада (1975)

Первый тур

10 класс

З-ча **1**. Найти все действительные решения уравнения с 4 неизвестными:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y + z + t).$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Точка A расположена на расстоянии 50 см от центра круга радиуса 1 см. Разрешается точку A отразить симметрично относительно произвольной прямой, пересекающей круг; полученную точку отразить симметрично относительно любой прямой, пересекающей круг, и т.д. Доказать, что: а) за 25 отражений точку A можно переместить внутрь круга; б) за 24 отражения этого сделать нельзя.

Реш **2**.

З-ча **3**. Натуральные числа a, b, c таковы, что числа $p = b^c + a$, $q = a^b + c$, $r = c^a + b$ простые. Доказать, что два из чисел p, q, r равны между собой.

Реш **3**.

З-ча **4**. На шахматной доске размером 8×8 отмечены 64 точки — центры всех клеток. Можно ли отделить все точки друг от друга, проведя 13 прямых, не проходящих через эти точки?

Реш **4**.

З-ча **5**. Можно ли разместить в пространстве четыре свинцовых шара и точечный источник света так, чтобы каждый исходящий из источника света луч пересекал хотя бы один из шаров?

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. Какое из двух чисел больше:

$$\text{а)}\quad \left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}\right\}100\text{ раз} \quad\text{или}\quad \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\}99\text{ раз},$$

$$\text{б)}\quad \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\}100\text{ раз} \quad\text{или}\quad \left.4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}}\right\}99\text{ раз?}$$

Реш **1**.

З-ча **2**. В окружность вписан выпуклый 7-угольник. Известно, что какие-то три его угла равны $120°$. Доказать, что найдутся две его стороны, имеющие одинаковую длину.

Реш **2**.

З-ча **3**. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 31 камня. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

Реш **3**.

З-ча **4**. В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности: а) набор цифр 1234; 3269; б) вторично набор 1975?

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. Какое из двух чисел больше:

$$\text{а)}\quad \left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}\right\}n\text{ раз}\quad\text{или}\quad \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\}n-1\text{ раз},$$

$$\text{б)}\quad \left.3^{3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}\right\}n\text{ раз}\quad\text{или}\quad \left.4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}}\right\}n-1\text{ раз?}$$

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности: а) набор цифр 1234; 3269; б) вторично набор 1975; в) набор 8197?

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеются две страны: *Обычная* и *Зазеркалье*. У каждого города в *Обычной* стране есть «двойник» в *Зазеркалье*, и наоборот. Однако если в *Обычной* стране какие-то два города соединены железной дорогой, то в *Зазеркалье* эти города не соединены, а любые два несоединённых в *Обычной* стране города обязательно соединены железной дорогой в *Зазеркалье*. В *Обычной* стране девочка Алиса не может проехать из города A в город B, сделав менее двух пересадок. Доказать, что Алиса в *Зазеркалье* сможет проехать из одного города в другой, сделав не более двух пересадок.

Реш **4**.

З-ча **5**. В футбольном турнире принимают участие n команд. Каждая команда встречается с каждой по одному разу, при этом выигравшей команде присуждается 2 очка, сыгравшей вничью — 1 очко, проигравшей — 0 очков. Какой максимальный разрыв в очках может быть между командами, занявшими соседние места?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 5 для 8 класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. В государстве Мантисса городá соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам меньше 500 км. Когда одна дорога оказалась закрытой на ремонт, выяснилось, что из каждого города можно проехать по оставшимся дорогам в любой другой. Доказать, что при этом можно проехать меньше 1500 км.

Реш **4**.

З-ча **5**. Можно ли какой-нибудь выпуклый многоугольник разрезать на конечное число невыпуклых четырёхугольников?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Коля и Витя играют в следующую игру. На столе лежит куча из 100 камней. Мальчики делают ходы поочерёдно, а начинает Коля. Делая ход, играющий делит каждую кучку, в которой больше одного камня, на две меньшие кучки. Выигрывает тот, кто после своего хода оставляет кучки по одному камню в каждой. Сможет ли Коля сделать так, чтобы выиграть при любой игре Вити?

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 9 класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. Арена цирка освещается n различными прожекторами. Каждый прожектор освещает некоторую выпуклую фигуру. Известно, что если выключить один произвольный прожектор, то арена будет по-прежнему полностью освещена, а если выключить произвольные 2 прожектора, то арена полностью освещена не будет. При каких значениях n это возможно?

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Реш **5**.

XXXIX олимпиада (1976)

Первый тур

10 класс

З-ча **1**. Найти все положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= x_3^2, \\ x_2 + x_3 &= x_4^2, \\ x_3 + x_4 &= x_5^2, \\ x_4 + x_5 &= x_1^2, \\ x_5 + x_1 &= x_2^2. \end{cases}$$

Реш **1**.

З-ча **2**. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса BK и высота CH. Пусть $M'K'H'$ — треугольник с вершинами в точках пересечения трёх проведённых отрезков. Может ли площадь полученного треугольника быть больше 0,499 площади треугольника ABC?

Реш **2**.

З-ча **3**. Каковы первые четыре цифры числа $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 999^{999} + 1000^{1000}$?

Реш **3**.

З-ча **4**. Астрономический прожектор освещает октант (трёхгранный угол, у которого все плоские углы прямые). Прожектор промещён в центр куба. Можно ли его повернуть таким образом, чтобы он не освещал ни одной вершины куба?

Реш **4**.

З-ча **5**. На бесконечном листе клетчатой бумаги (размер клетки 1×1) укладываются кости домино размером 1×2 так, что они покрывают все клетки. Можно ли при этом добиться того, чтобы каждая прямая, идущая по линиям сетки, разрезала бы лишь конечное количество костей домино?

Реш **5**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**.

Даны четыре одинаковых по виду шара массой 101 г, 102 г, 103 г и 104 г, а также чашечные весы со стрелкой, на которых можно взвесить произвольный груз. Сделав два взвешивания, определить массу каждого шара.

Реш **1**.

З-ча **2**. Может ли выпуклый неправильный пятиугольник иметь ровно 4 стороны одинаковой длины и ровно 4 диагонали одинаковой длины?

Реш **2**.

З-ча **3**. Существует ли такое натуральное число n, что сумма цифр числа n^2 равна 100?

Реш **3**.

З-ча **4**. Можно ли на плоскости расположить конечное число точек таким образом, чтобы у каждой точки было бы ровно три ближайших к ней точки?

Реш **4**.

З-ча **5**. В клетках таблицы размером 10×20 расставлено 200 различных чисел. В каждой строчке отмечены 2 наибольших числа красным цветом, а в каждом столбце отмечены 2 наибольших числа синим цветом. Доказать, что не менее трёх чисел отмечены в таблице как красным, так и синим цветом.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 3 для 7 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. У квадрата $ABCD$ длина стороны — целое число. Внутри квадрата размещены параллельно его сторонам отрезки, делящие квадрат на более мелкие квадраты, длины сторон которых тоже целые. Длина каждого отрезка — целое число. Доказать, что сумма длин всех отрезков кратна 4.

Реш **2**.

З-ча **3**. На сферическом Солнце обнаружено конечное число круглых пятен, каждое из которых занимает меньше половины поверхности Солнца. Эти пятна предполагаются замкнутыми (т.е. граница пятна принадлежит ему) и не пересекаются между собой. Доказать, что на Солнце найдутся две диаметрально противоположные точки, не покрытые пятнами.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 5 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. На плоскости задано конечное множество точек. Доказать, что в нём найдётся точка, у которой имеется не более трёх ближайших к ней точек из этого же множества.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Может ли число $n!$ оканчиваться цифрами $1976000\ldots000$?

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 8 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что существует такое натуральное число n, большее 1000, что сумма цифр числа 2^n больше суммы цифр числа 2^{n+1}.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дано число N, в записи которого нет нулей. Если в нём стоят рядом две одинаковые цифры или два одинаковых двузначных числа, то их разрешается вычеркнуть. Кроме того, разрешается также в любое место вставить две одинаковые цифры или два одинаковых двузначных числа. Доказать, что, комбинируя эти операции, можно из числа N получить число, меньшее 10^9.

Реш **4**.

З-ча **5**. На столе лежит большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1 см и неограниченное количество пятикопеечных монет (пятаков); радиус пятака равен 1,3 см. Доказать, что лист можно покрыть пятаками, не налегающими друг на друга, так, чтобы все узлы листа оказались покрытыми.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Существует ли такое натуральное число A, что если приписать его к самому себе справа, то полученное число окажется полным квадратом?

Реш **1**.

З-ча **2**. Существует ли такой выпуклый 1976-гранник, который обладал бы следующим свойством: при произвольной расстановке стрелок на концах его рёбер сумма полученных векторов отлична от 0?

Реш **2**.

З-ча **3**. В клетках таблицы размером 10×20 расставлено 200 различных чисел. В каждой строчке отмечены 3 наибольших числа красным цветом, а в каждом столбце отмечены 3 наибольших числа синим цветом. Доказать, что не менее 9 чисел отмечены в таблице как красным, так и синим цветом.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 5 для 8 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. Каждая точка пространства окрашена в один из фиксированных пяти цветов, причём имеется 5 точек, окрашенных в различные цвета. Доказать, что существует прямая, все точки которой окрашены не менее чем в три цвета, и плоскость, все точки которой окрашены не менее чем в четыре цвета.

Реш **5**.

XL олимпиада (1977)

Первый тур

10 класс

З-ча **1**. Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ строится по следующему правилу: $x_1 = 2, x_{n+1} = [1,5x_n]$ ([] — целая часть числа).

а) Доказать, что в последовательности $\{x_n\}$ бесконечно много нечетных чисел.

б) Доказать, что в последовательности $\{x_n\}$ бесконечно много четных чисел.

Реш **1**.

З-ча **2**. На столе расположено n картонных квадратов и n пластмассовых квадратов. Никакие два картонных квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. То же самое имеет место и для пластмассовых квадратов. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым?

Реш **2**.

З-ча **3**. а) Двенадцать тонких твердых стержней длины 1 скрепили так, чтобы получился каркас куба. Можно ли сделать в плоскости отверстие площади меньше 1/100, не разбивающее плоскость на куски, чтобы через него можно было бы протащить этот каркас?

б) Тот же вопрос для каркаса тетраэдра с ребром длины 1.

Реш **3**.

З-ча **4**. Каждая точка числовой оси, координата которой — целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдется цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k.

Реш **4**.

Второй тур

7 класс

З-ча **1**. В каждой вершине выпуклого k-угольника находится охотник, вооруженный лазерным ружьем. Все охотники одновременно выстрелили в зайца, сидящего в точке O внутри этого k-угольника. В момент выстрела заяц пригибается, и все охотники погибают. Доказать, что нет другой точки, кроме O, обладающей указанным свойством.

Реш **1**.

З-ча **2**. Куб $3 \times 3 \times 3$ составлен из 14 белых и 13 черных кубиков со стороной 1. *Столбик* — это три кубика, стоящих рядом вдоль одного направления: ширины, длины или высоты. Может ли быть так, что в каждом столбике а) нечетное количество белых кубиков? б) нечетное количество черных кубиков?

Реш **2**.

З-ча **3**. Докажите, что можно найти более тысячи троек натуральных чисел a, b, c, для которых выполняется равенство $a^{15} + b^{15} = c^{16}$.

Реш **3**.

З-ча **4**. В доске торчит 1977 гвоздей. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий соединяет проводом два гвоздя. Если в результате хода оказалась замкнутая цепь, то сделавший этот ход считается выигравшим. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (Не разрешается соединять проводом два ранее уже соединенных гвоздя.)

Реш **4**.

З-ча **5**. Найти наименьшее n такое, что любой выпуклый 100-угольник можно получить в виде пересечения n треугольников. Докажите, что для меньших n это можно сделать не с любым выпуклым 100-угольником.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 7 класса.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **4**. См. задачу 5 для 7 класса.

З-ча **5**. В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.

а) Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.

б) Постройте пример такого турнира семи команд.

в)* Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. В пространстве расположено n отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Для любых двух отрезков прямая, соединяющая их середины, перпендикулярна обоим отрезкам. При каком наибольшем n это возможно?

Реш **1**.

З-ча **2**. Существуют ли а) шесть, б) 1000 таких различных натуральных чисел, что для любых двух a и b из них сумма $a+b$ делится на разность $a-b$?

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 5 для 8 класса.

З-ча **4**. В пространстве расположен выпуклый многогранник, все вершины которого находятся в целых точках. Других целых точек внутри, на гранях и на ребрах нет. (Целой называется точка, все три координаты которой — целые числа.) Доказать, что число вершин многогранника не превосходит восьми.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x > x)$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1, b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x + 1$.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 2 для 9 класса.

З-ча **2**. См. задачу 5 для 8 класса.

З-ча **3**. См. задачу 5 для 9 класса.

З-ча **4**. Можно ли на плоскости расположить бесконечное множество одинаковых кругов так, чтобы любая прямая пересекала не более двух кругов?

Реш **4**.

З-ча **5**. Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ строится по следующему правилу: $x_1 = 2, \ldots, x_n = [1,5x_{n-1}]$ ([] — целая часть числа). Доказать, что последовательность $y_n = (-1)^{x_n}$ непериодическая.

Реш **5**.

XLI олимпиада (1978)

7 класс

З-ча **1**. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $3 \cdot 2^x = y^2$.

Реш **1**.

З-ча **2**. На плоскости расположен пластмассовый треугольник. Если начать перекатывать его через стороны и если он в какой-то момент пересечётся со своим первоначальным положением, то окажется, что он просто совпал со своим первоначальным положением. Какие треугольники удовлетворяют такому условию? Указать все виды таких треугольников.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что в прямоугольник размером $n \times 2m$ (n и m — целые) можно уложить в два слоя кости домино размером 1×2 так, чтобы каждый слой полностью покрывал прямоугольник и чтобы никакие две кости из разных слоёв не совпадали друг с другом.

Реш **3**.

З-ча **4**. Город имеет форму квадрата. В нём 6 улиц: 4 стороны квадрата и 2 его средние линии. Полицейский гоняется по улицам за гангстером. Если в какой-то момент полицейский и гангстер оказываются на одной улице, то гангстер сдаётся полицейскому. Доказать, что полицейский сможет поймать гангстера, если его скорость в 3 раза больше скорости гангстера.

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. В n-угольнике расположено несколько точек таким образом, что в произвольном треугольнике, образованном любыми тремя вершинами n-угольника, расположена по крайней мере одна точка. Какоу наименьшее число точек могло быть?

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дано некоторое 1000-значное число A. Про него известно, что любые его 10 идущих подряд цифр образуют число, кратное 2^{10}. Доказать, что число A делится на 2^{1000}.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 8 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. Существует ли на плоскости конечный набор различных векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$, …, $\overrightarrow{a_n}$ такой, что для любой пары различных векторов из этого набора найдётся такая другая пара из этого набора, что суммы каждой из пар равны между собой?

Реш **2**.

З-ча **3**. Город имеет форму квадрата. В нём 6 улиц: 4 стороны квадрата и 2 его средние линии. Полицейский гоняется по улицам за гангстером. Если в какой-то момент полицейский и гангстер оказываются на одной улице, то гангстер сдаётся полицейскому. Доказать, что полицейский сможет поймать гангстера, если его скорость: а) в 3 раза больше скорости гангстера; б) в 2,1 раза больше скорости гангстера.

Реш **3**.

З-ча **4**. На плоскости расположено несколько прямых и точек. Доказать, что на плоскости найдётся точка A, не совпадающая ни с одной из данных точек, растояние от которой до любой из данных точек больше расстояния от неё до любой из данных прямых.

Реш **4**.

З-ча **5**. В посёлке живут 100 жительниц. У каждой из них имеются 3 знакомые жительницы. 1 января одна узнала интересную новость и сообщила её трём своим знакомым; 2 января те сообщили новость всем своим знакомым и т.д. Может ли случиться так, что 5 марта ещё не все жительницы будут знать эту новость, а 19 марта — все?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. У белой сферы 12% её площади окрашено в красный цвет. Доказать, что в сферу можно вписать параллелепипед, у которого все вершины белые.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 9 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 9 класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что существует: а) *одно*; б) *бесконечно много* таких натуральных чисел n, что последние цифры числа 2^n образуют число n.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дано 8 действительных чисел: a, b, c, d, e, f, g, h. Доказать, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

Реш **5**.

XLII олимпиада (1979)

7 класс

З-ча **1**. На плоскости отмечена точка O. Можно ли так расположить на плоскости: а) 5 кругов; б) 4 круга, не покрывающих точку O, чтобы любой луч с началом в точке O пересекал не менее двух кругов?

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется несколько гирь, общая масса которых равна 1 кг. Каждой гире присвоен свой номер: 1, 2, 3, ... Доказать, что найдётся такой номер n, что масса гири с номером n строго больше $\frac{1}{2^n}$ кг.

Реш **2**.

З-ча **3**. Квадрат разрезан на прямоугольники. Доказать, что сумма площадей кругов, описанных около каждого прямоугольника, не меньше площади круга, описанного около квадрата.

Реш **3**.

З-ча **4**. Коля и Витя играют в следующую игру на бесконечной клетчатой бумаге. Начиная с Коли, они по очереди отмечают узлы клетчатой бумаги — точки пересечения вертикальных и горизонтальных прямых. При этом каждый из них своим ходом должен отметить такой узел, что после этого все отмеченные узлы лежали в вершинах выпуклого многоугольника (начиная со второго хода Коли). Тот из играющих, кто не сможет сделать очередного хода, считается проигравшим. Кто выигрывает при правильной игре?

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. На плоскости отмечена точка O. Можно ли так расположить на плоскости: а) 7 кругов; б) 6 кругов, не покрывающих точку O, чтобы любой луч с началом в точке O пересекал не менее трёх кругов?

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Диагонали AC и BD четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Доказать, что длина перпендикуляра OH, опущенного из центра окружности на сторону AD, вдвое меньше длины стороны BC.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 3 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. На химической конференции присутствовало k учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: «Кем является такой-то: химиком или алхимиком?» (В частности, может спросить, кем является сам этот учёный.) Доказать, что математик может установить это за: а) $4k$ вопросов; б) $2k-2$ вопросов.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Имеется несколько камней, масса каждого из которых не превосходит 2 кг, а общая масса равна 100 кг. Из них выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число d. Какое максимальное значение может принимать число d для всевозможных наборов камней?

Реш **1**.

З-ча **2**. Можно ли всё пространство представить в виде объединения бесконечного числа попарно скрещивающихся прямых?

Реш **2**.

З-ча **3**. а) Существует ли последовательность натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ..., обладающая следующим свойством: ни один член последовательности не равен сумме нескольких других и $a_n \leqslant n^{10}$ при любом n?

б) Тот же вопрос, если $a_n \leqslant n\sqrt{n}$ при любом n.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 3 для 8 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. На химической конференции присутствовало k учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: «Кем является такой-то: химиком или алхимиком?» (В частности, может спросить, кем является сам этот учёный.) Доказать, что математик может установить это за $2k-3$ вопросов.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. На отрезке длины 1 отмечено несколько интервалов. Известно, что расстояние между любыми двумя точками, принадлежащими одному или разным отмеченным интервалам, не равно 0,1. Доказать, что сумма длин отмеченных интервалов не превосходит 0,5.

Реш **2**.

З-ча **3**. Функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[0;1]$ и в каждой точке этого отрезка имеет первую и вторую производные. Известно, что $f(0)=f(1)=0$ и что $|f''(x)|\leqslant 1$ на всём отрезке. Какое наибольшее значение может принимать максимум функции f для всевозможных функций, удовлетворяющих этим условиям?

Реш **3**.

З-ча **4**. Объединение нескольких кругов имеет площадь 1. Доказать, что из них можно выбрать несколько попарно непересекающихся кругов, сумма площадей которых больше $\frac{1}{9}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 9 класса.

Реш **5**.

XLIII олимпиада (1980)

7 класс

З-ча **1**. Найти наибольшее пятизначное число A, у которого четвёртая цифра больше пятой, третья больше суммы четвёртой и пятой, вторая больше суммы третьей, четвёртой и пятой и первая цифра больше суммы остальных.

Реш **1**.

З-ча **2**. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано одно из двух чисел: $+1$ или -1. При этом количество $+1$ не меньше двух и количество -1 не меньше двух. Доказать, что найдутся две строки и два столбца такие, что сумма четырёх чисел, стоящих на их пересечении, равна 0.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что максимальное количество сторон выпуклого многоугольника, стороны которого лежат на диагоналях данного выпуклого 100-угольника, не больше 100.

Реш **3**.

З-ча **4**. Три прямолинейных коридора одинаковой длины l образуют фигуру, изображённую на рис.???. По ним бегают гангстер и полицейский. Максимальная скорость полицейского в 2 раза больше максимальной скорости гангстера. Полицейский сможет увидеть гангстера, если он окажется от него на расстоянии, не большем r. Доказать, что полицейский всегда может поймать гангстера, если: а) $r > \frac{l}{3}$; б) $r > \frac{l}{4}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Десять вершин правильного 20-угольника $A_1A_2A_3\dots A_{20}$ покрашены в чёрный цвет, а десять других — в белый. Рассматривается множество, состоящее из диагонали A_1A_4 и всех диагоналей, равных ей. Доказать, что в этом множестве количество диагоналей с двумя чёрными концами равно количеству диагоналей с двумя белыми концами.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Доказать, что если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \dots \leqslant a_{10}$, то

$$\frac{a_1 + \dots + a_6}{6} \leqslant \frac{a_1 + \dots + a_{10}}{10}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. На хорде AB окружности K с центром в точке O взята точка C. D — вторая точка пересечения окружности K с окружностью, описанной около ΔACO. Доказать, что $CD = CB$.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 5 для 7 класса.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. a_1, a_2, a_3, …, a_n, … — возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{n+1} \leqslant 10a_n$ при всех натуральных n. Доказать, что бесконечная десятичная дробь $0,a_1a_2a_3\dots$, полученная приписыванием этих чисел друг к другу, непериодичекая.

Реш **1**.

З-ча **2**. На пульте имеется несколько кнопок, с помощью которых осуществляется управление световым табло. После нажатия любой кнопки некоторые лампочки на табло переключаются (для каждой кнопки есть свой набор лампочек, причём наборы могут пересекаться). Доказать, что число состояний, в которых может находиться табло, равно некоторой степени числа 2.

Реш **2**.

З-ча **3**. На прямоугольном листе клетчатой бумаги размером $m \times n$ клеток расположено несколько квадратов, стороны которых идут по вертикальным и горизонтальным линиям бумаги. Известно, что никакие два квадрата не совпадают и никакой квадрат не содержит внутри себя другой квадрат. Каково наибольшее число таких квадратов?

Реш **3**.

З-ча **4**. Три прямолинейных коридора одинаковой длины l образуют фигуру, изображённую на рис.???. По ним бегают гангстер и полицейский. Максимальная скорость полицейского в 2 раза больше максимальной скорости гангстера. Полицейский сможет увидеть гангстера, если н окажется от него на расстоянии, не большем r. Доказать, что полицейский всегда может поймать гангстера, если: а) $r > \frac{l}{5}$; б) $r > \frac{l}{7}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. См. задачу 3 для 8 класса.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса.

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 9 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 4 для 9 класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. В каждой клетке таблицы 1980×1980 записано одно из чисел $+1$, -1, 0. Сумма всех чисел равна 0. Доказать, что существуют две строки и два столбца такие, что сумма четырёх чисел, стоящих на их пересечениях, равна 0.

Реш **4**.

З-ча **5**. На сфере радиуса 1 расположено несколько дуг больших окружностей (большая окружность — это пересечение сферы с плоскостью, проходящей через её центр). Сумма длин всех этих дуг меньше π. Доказать, что найдётся плоскость, проходящая через центр сферы, которая не пересекается ни с одной из дуг.

Реш **5**.

XLIV олимпиада (1981)

7 класс

З-ча **1**. Натуральное число A при делении на 1981 дало в остатке 35, при делении на 1982 оно дало в остатке также 35. Каков остаток от деления числа A на 14?

Реш **1**.

З-ча **2**. Дано число, имеющее 13 разрядов. Доказать, что одну из его цифр можно вычеркнуть так, что в полученном числе количество семёрок на чётных местах будет равно количеству семёрок на нечётных местах.

Реш **2**.

З-ча **3**. На двух равных круглых листах бумаги художник нарисовал одинаковых драконов. Оказалось, что на первом листе глаз дракона совпал с центром круга, а на втором — не совпал. Доказать, что второй лист бумаги можно разрезать на такие две части, чтобы из них удалось сложить круг того же радиуса с тем же драконом, но чтобы его глаз уже находился в центре круга.

Реш **3**.

З-ча **4**. Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}]?$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Имеется 5 гирь. Их массы равны 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г и 1007 г, но надписей на гирях нет и внешне они неотличимы. Имеются весы со стрелкой, которые показывают массу в граммах. Как с помощью трёх взвешиваний определить гирю в 1000 г?

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. В пятиугольнике проведены все диагонали. Какие 7 углов между двумя диагоналями или между диагоналями и сторонами надо отметить, чтобы из равенства этих углов друг другу следовало, что пятиугольник — правильный?

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 2 для 7 класса.

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 7 класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. См. задачу 4 для 7 класса.

Реш **4**.

З-ча **5**. Дано 10 натуральных чисел: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{10}$. Доказать, что их наименьшее общее кратное не меньше $10a_1$.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Дано число, имеющее нечётное число разрядов. Доказать, что одну из его цифр можно вычеркнуть так, что в полученном числе количество семёрок на чётных местах будет равно количеству семёрок на нечётных местах.

Реш **1**.

З-ча **2**. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что каждое не превышает своего номера ($a_k \leqslant k$) и сумма всех чисел — чётное число. Доказать, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n$ равна нулю.

Реш **2**.

З-ча **3**. X и Y — два выпуклых многоугольника, причём многоугольник X содержится внутри Y. Пусть $S(X)$ и $S(Y)$ — площади этих многоугольников, а $P(X)$ и $P(Y)$ — их периметры. Доказать, что $\frac{S(X)}{P(X)} < 2 \cdot \frac{S(Y)}{P(Y)}$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число бесконечных подмножеств, каждое из которых получается из любого другого подмножества прибавлением одного и того же целого числа к каждому элементу?

Реш **4**.

З-ча **5**. У правильного 1981-угольника отмечены 64 вершины. Доказать, что существует трапеция с вершинами в отмеченных точках.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Рассматривается функция $y = f(x)$, определённая на всём множестве действительных чисел и удовлетворяющая для некоторого числа $k \neq 0$ соотношению $f(x+k) \cdot (1 - f(x)) = 1 + f(x)$. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция.

Реш **1**.

З-ча **2**. Дан многочлен $P(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным 1. Известно, что если x — целое число, то $P(x)$ — целое число, кратное p (p — натуральное число). Доказать, что $n!$ делится на p.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что последовательность $x_n = \sin(n^2)$ не стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.

Реш **3**.

З-ча **4**. В квадрате со стороной длины 1 расположена ломаная без самопересечений, длина которой не меньше 200. Доказать, что найдётся прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая ломаную не менее чем в 101-й точке.

Реш **4**.

З-ча **5**. Радиус вписанной в треугольник окружности равен $\frac{4}{3}$, а длины высот треугольника — целые числа, сумма которых равна 13. Вычислить длины сторон треугольника.

Реш **5**.

З-ча **6**. За круглым столом сидят n человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

Реш **6**.

XLV олимпиада (1982)

7 класс

З-ча **1**. Петя купил в магазине «Машины Тьюринга и другие вычислительные устройства» микрокалькулятор, который может выполнять следующие операции: по любым числам x и y он вычисляет $x+y$, $x-y$ и $\frac{1}{x}$ (при $x \neq 0$). Петя утверждает, что он может возвести любое положительное число в квадрат с помощью своего микрокалькулятора, сделав не более 6 операций. А вы можете это сделать? Если да, то попробуйте перемножить любые два положительных числа, сделав не более 20 операций (промежуточные результаты можно записывать, неоднократно используя их в вычислениях).

Реш **1**.

З-ча **2**. В квадрате $ABCD$ находятся 5 точек. Доказать, что расстояние между какими-то двумя из них не превосходит $\frac{1}{2}AC$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Петя приобрёл в магазине вычислительный автомат, который за 5 к. умножает любое введённое в него число на 3, а за 2 к. прибавляет к любому числу 4. Петя хочет, начиная с единицы, которую можно ввести бесплатно, набрать на автомате число 1981 и затратить наименьшую сумму денег. Во сколько обойдутся ему вычисления? А что будет, если он захочет набрать число 1982?

Реш **3**.

З-ча **4**. Какое наименьшее количество точек на плоскости надо взять, чтобы среди попарных расстояний между ними встретились числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64?

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. Упростить выражение
$$\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Прямоугольник разрезан на пять прямоугольников. Доказать, что среди полученных пяти найдутся два прямоугольника, один из которых полностью может располагаться внутри другого.

Реш **2**.

З-ча **3**. Числа 1, 2, 3, ..., 1982 возводятся в квадрат и записываются подряд в некотором порядке. Может ли полученное многозначное число быть полным квадратом?

Реш **3**.

З-ча **4**. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из его сторон. Доказать, что отношение каждой диагонали к соответствующей стороне равно $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Считая известной формулу $1^3+2^3+\dots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$, доказать, что для различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо неравенство $(a_1^7+a_2^7+\dots+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+\dots+a_n^5) \geqslant 2(a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3)$. Возможно ли равенство для каких-нибудь различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Найти все натуральные числа n, для которых число $n\cdot 2^n+1$ кратно трём.

Реш **1**.

З-ча **2**. Найти на плоскости точку, сумма расстояний от которой до четырёх заданных точек минимальна.

Реш **2**.

З-ча **3**. На плоскости отмечены точки с целочисленными координатами. Доказать, что найдётся окружность, внутри которой лежат ровно 1982 отмеченные точки.

Реш **3**.

З-ча **4**. Число $A=0,1+0,02+0,003+\dots+n10^{-n}+\dots$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Доказать, что в полученной записи не встретятся подряд идущие цифры 1982.

Реш **4**.

З-ча **5**. В выпуклом четырёхугольнике две стороны равны 1, а другие стороны и обе диагонали не больше 1. Какое максимальное значение может принимать периметр четырёхугольника?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. а) Доказать, что если из некоторой точки внутри правильного тетраэдра все его рёбра видны под одинаковыми углами, то эта точка — центр описанной около тетраэдра сферы.

б) Существуют ли вне тетраэдра точки, из которой все его рёбра видны под равными углами?

Примечание. Если точка лежит на ребре или его продолжении, то считается, что из неё это ребро видно под углом π или 0 соответственно.

Реш **1**.

З-ча **2**. а) a, b, c — длины сторон треугольника. Доказать, что $a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + a^2bc + b^2ac + c^2ab \geqslant 0$.

б) Доказать, что $a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+a^2bc+b^2ac+c^2ab \geqslant 0$ для любых неотрицательных a, b, c.

Реш **2**.

З-ча **3**. Петя приобрёл в магазине «Машины Тьюринга и другие вычислительные устройства» микрокалькулятор, который может по любым действительным числам x и y вычислить $xy+x+y+1$ и не имеет других операций. Петя хочет написать «программу» для вычисления многочлена $1 + x + x^2 + \cdots + x^{1982}$. Под «программой» он понимает последовательность многочленов $f_1(x)$, …, $f_n(x)$ такую, что $f_1(x) \equiv x$ и для любого $i = 2, \dots, n$ $f_i(x) = c_i$ или $f_i(x) = f_j(x) \cdot f_k(x) + f_k(x) + f_j(x) + 1$, где $j < i$, $k < i$, причём $f_n(x) \equiv 1 + x + \cdots + x^{1982}$.

а) Помогите Пете написать «программу».

б) Сумеете ли Вы написать «программу», если калькулятор имеет только одну операцию $xy + x + y$?

Реш **3**.

З-ча **4**. Найти все такие натуральные n, для которых числа $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражаются конечными десятичными дробями.

Реш **4**.

З-ча **5**. Внутри правильного шестиугольника находится другой правильный шестиугольник с вдвое меньшей стороной. Доказать, что центр большого шестиугольника лежит внутри малого шестиугольника.

Реш **5**.

XLVI олимпиада (1983)

7 класс

З-ча **1**. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$x^2 = y^2 + 2y + 13.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Белая плоскость произвольным образом забрызгана чёрной тушью. Доказать, что для любого положительного l существует отрезок длины l, у которого оба конца одного цвета.

Реш **2**.

З-ча **3**. Найти наименьшее натуральное число, начинающееся с цифры 4 и уменьшающееся в четыре раза от перестановки этой цифры в конец числа.

Реш **3**.

З-ча **4**. Двум друзьям необходимо попасть в соседний город. У них есть один велосипед, на котором может ехать только один человек. Каково минимальное время, за которое оба могут добраться до города (считая по последнему прибывшему), если скорости пешеходов u_1 и u_2, их скорости на велосипеде v_1 и v_2, расстояние до города равно S (они могут возвращаться и оставлять велосипед друг другу)?

Реш **4**.

З-ча **5**. Существует ли пятиугольник со сторонами 3, 4, 9, 11 и 13 см, в который можно вписать окружность?

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Доказать, что при любых $x > \sqrt{2}$ и $y > \sqrt{2}$ выполняется неравенство $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2$.

Реш **1**.

З-ча **2**. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Может ли квадрат какого-либо натурального числа начинаться с 1983-х девяток?

Реш **3**.

З-ча **4**. В вершинах правильного 1983-угольника расставлены числа 1, 2, …, 1983. Любая его ось симметрии делит числа, не лежащие на ней, на два множества. Назовём расстановку «хорошей» относительно данной оси симметрии, если каждое число одного множества больше симметричного ему числа. Существует ли расстановка, являющаяся «хорошей» относительно *любой* оси симметрии?

Реш **4**.

З-ча **5**. На окружности выбрано пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, H. Обозначим через h_{ij} расстояние от точки H до прямой A_iA_j. Доказать, что $h_{12} \cdot h_{34} = h_{14} \cdot h_{23}$.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Доказать, что при любой расстановке знаков «+» и «−» у нечётных степеней x выполнено неравенство

$$x^{2n} \pm x^{2n-1} + x^{2n-2} \pm x^{2n-3} + \cdots + x^4 \pm x^3 + x^2 \pm x + 1 > \frac{1}{2}$$

(x — произвольное действительное число, а n — натуральное).

Реш **1**.

З-ча **2**. Три окружности радиусов 3, 4, 5 внешне касаются друг друга. Через точку касания окружностей радиусов 3 и 4 проведена их общая касательная. Найти длину отрезка этой касательной, заключённой внутри окружности радиуса 5.

Реш **2**.

З-ча **3**. Доказать, что $1^{1983} + 2^{1983} + \cdots + 1983^{1983}$ делится на $1 + \cdots + 1983$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Двадцать городов соединены 172-мя авиалиниями. Доказать, что, используя эти авиалинии, можно из любого города перелететь в любой другой (быть может, делая пересадки).

Реш **4**.

10 класс

З-ча **1**. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, в которых окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, AC и AB соответственно. Известно, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Доказать, что треугольник ABC правильный.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что $4^m - 4^n$ делится на 3^{k+1} тогда и только тогда, когда $m - n$ делится на 3^k. Решить задачу: а) при $k = 1, 2, 3$; б) при произвольном k.

Реш **2**.

З-ча **3**. На доске после занятия осталась запись: «Вычислить $t(0)-t(\frac{\pi}{5})+t(\frac{2\pi}{5})-t(\frac{3\pi}{5})+\cdots+t(\frac{8\pi}{5})-t(\frac{9\pi}{5})$, где $t(x) = \cos 5x + * \cos 4x + * \cos 3x + * \cos 2x + * \cos x + *$». Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов (вместо них в нашей записи *). Не ошибается ли он?

Реш **3**.

З-ча **4**. В пространстве выбрано 8 точек, никакие 4 из которых не лежат в одной плоскости. Проведено 17 отрезков, у каждого из которых оба конца лежат в упомянутых точках. Доказать, что: а) отрезки образуют хотя бы один треугольник; б) треугольников на самом деле не меньше четырёх.

Реш **4**.

З-ча **5**. За круглым столом сидят 13 богатырей из k городов, где $1 < k < 13$. Каждый богатырь держит в руке золотой или серебряный кубок, причём золотых кубков тоже k. Князь повелел каждому богатырю передать свой кубок соседу справа и повторять это до тех пор, пока какие-нибудь два богатыря из одного города оба не получат золотые кубки. Доказать, что желание князя всегда будет исполнено.

Реш **5**.

XLVII олимпиада (1984)

8 класс

З-ча **1**. Решите уравнение $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.

Реш **2**.

З-ча **3**. Докажите, что сумма расстояний от центра правильного семиугольника до всех его вершин меньше, чем сумма расстояний до них от любой другой точки.

Реш **3**.

З-ча **4**. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Докажите, что их можно расставить по кругу так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше $\frac{1}{5}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Разрежьте квадрат на 8 остроугольных треугольников.

Реш **5**.

З-ча **6**. Является ли четным число всех 64-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?

Реш **6**.

9 класс

З-ча **1**. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, а боковые грани — одинаковую площадь. Докажите, что основание этой пирамиды — равнобедренный треугольник.

Реш **1**.

З-ча **2**. Каждые две из 13 - ти ЭВМ соединены своим проводом. Можно ли раскрасить каждый из этих проводов в один из 12 - ти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило 12 проводов разного цвета?

Реш **2**.

З-ча **3**. Некоторый треугольник можно вырезать из бумажной полоски единичной ширины, а из любой полоски меньшей ширины его вырезать нельзя. Какую площадь может иметь этот треугольник?

Реш **3**.

З-ча **4**. По кругу расставлено не менее четырех неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $\frac{1}{4}$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Существует ли три ненулевые цифры, с помощью которых можно составить бесконечное число десятичных записей квадратов различных целых чисел?

Реш **5**.

З-ча **6**. В прямоугольнике размера 3×4 произвольно расположены 4 точки. Докажите, что между какими-то двумя из них расстояние не больше, чем $\frac{25}{8}$.

Реш **6**.

10 класс

З-ча **1**. Не используя калькуляторов, таблиц и т.п., докажите неравенство $\sin 1 < log_3\sqrt{7}$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Жюри олимпиады решило по ее результатам сопоставить каждому участнику натуральное число таким образом, чтобы по этому числу можно было однозначно восстановить баллы, полученные участником за каждую задачу, и чтобы из каждых двух школьников бóльшее число сопоставлялось тому, кто набрал бóльшую сумму баллов. Помогите жюри решить эту задачу!

Реш **2**.

З-ча **3**. Решите уравнение в целых числах $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

Реш **3**.

З-ча **4**. В некотором царстве, в некотором государстве было выпущено неограниченное количество монет достоинством в $n_1, n_2, n_3, \ldots$ копеек, где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — бесконечная последовательность, состоящая из натуральных чисел. Докажите, что эту последовательность можно оборвать, т.е. найдется такое число N, что любую сумму, которую можно уплатить без сдачи выпущенными монетами, на самом деле можно уплатить только монетами достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_N$ копеек.

Реш **4**.

З-ча **5**. Квадрат разрезан на остроугольные треугольники. Докажите, что их не меньше 8.

Реш **5**.

З-ча **6**. Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

Реш **6**.

XLVIII олимпиада (1985)

7 класс

З-ча **1**. Найти все значения x и y, удовлетворяющие равенству

$$xy + 1 = x + y.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Даны пять различных положительных чисел, которые можно разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми. Сколькими способами это можно сделать?

Реш **2**.

З-ча **3**. Длины a, b, c, d четырех отрезков удовлетворяют неравенствам $0 < a \leqslant b \leqslant c < d$, $d < a+b+c$. Можно ли из этих отрезков сложить трапецию?

Реш **3**.

З-ча **4**. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырех углов по одному волку. Может ли заяй выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью в $1,4$ раза большей, чем максимальная скорость зайца?

Реш **4**.

З-ча **5**. В магазин привезли цистерну молока. У продавца имеются чашечные весы без гирь (на чашки весов можно ставить фляги), а также три одинаковые фляги, две из которых пустые, а в третьей налит 1 л молока. Как отлить в одну флягу ровно 85 л молока, сделав не более восьми взвешиваний?

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{1985}$ представляют собой переставленные в некотором порядке числа $1, 2, \ldots, 1985$. Каждое число a_k умножается на его номер k, а затем среди полученных 1985 произведений выбирается наибольшее. Доказать, что оно не меньше, чем 993^2.

Реш **2**.

З-ча **3**. На листе бумаги «в клетку» положен бумажный квадрат, площадь которого равна учетверенной площади клетки. Какое наименьшее число узлов может накрывать этот квадрат? (Узел — это точка пересечения линий бумаги; если узел лежит на границе квадрата, то он считается накрытым.)

Реш **3**.

З-ча **4**. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что если длина каждой из трех биссектрис треугольника больше 1, то его площадь больше $1/\sqrt{3}$.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{x - y + z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. В некоторой стране 1985 аэродромов. С каждого из них вылетел самолет и приземлился на самом удаленном от места старта аэродроме. Могло ли случиться, что в результате все 1985 самолетов оказались на 50 аэродромах? (Землю можно считать плоской, а маршруты прямыми.)

Реш **2**.

З-ча **3**. См. задачу 3 для 8 класса.

З-ча **4**. Доказать, что в любой группе из 12 человек можно выбрать двоих, а среди оставшихся 10 человек еще пятерых так, чтобы каждый из этих пятерых удовлетворял следующему условию: либо он дружит с обоими выбранными вначале, либо не дружит ни с одним из них.

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что любое число 2^n, где $n = 3, 4, 5, \ldots$ можно представить в виде $2^n = 7x^2 + y^2$, где x и y — нечетные числа.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Решить уравнение

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{49}{x-50} + \frac{50}{x-49}.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. См. задачу 3 для 7 класса.

З-ча **3**. Назовем «сложностью» данного числа наименьшую длину числовой последовательности (если такая найдется), которая начинается с нуля и заканчивается этим числом, причем каждый следующий член последовательности либо равен половине предыдущего, либо в сумме с предыдущим составляет 1. Среди всех чисел вида $m/2^{50}$, где $m = 1, 3, 5, \ldots, 2^{50} - 1$, найти число с наибольшей «сложностью».

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причем объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

Реш **4**.

З-ча **5**. Доказать, что если расстояния между скрещивающимися ребрами тетраэдра равны h_1, h_2, h_3, то объем тетраэдра не меньше, чем $h_1 h_2 h_3 / 3$.

Реш **5**.

XLIX олимпиада (1986)

7 класс

З-ча **1**. На листе прозрачной бумаги нарисован четырехугольник. Укажите способ, как сложить этот лист (возможно, в несколько раз), чтобы определить, является ли исходный четырехугольник ромбом.

Реш **1**.

З-ча **2**. Докажите, что ни для каких чисел x, y, t не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x| < |y-t|$, $|y| < |t-x|$, $|t| < |x-y|$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч нужно им выбрать, чтобы сумма времен, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

Реш **3**.

З-ча **4**. Произведение некоторых 1986 натуральных чисел имеет ровно 1986 различных простых делителей. Доказать, что либо одно из этих чисел, либо произведение нескольких из них является квадратом натурального числа.

Реш **4**.

З-ча **5**. Известно, что в кодовом замке исправны только кнопки с номерами 1, 2, 3, а код этого замка трехзначен и не содержит других цифр. Написать последовательность цифр наименьшей длины, наверняка открывающую этот замок (замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода).

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 7 класса с заменой ромба квадратом.

Реш **1**.

З-ча **2**. Найдите все натуральные числа, не предстваимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

Реш **2**.

З-ча **3**. Докажите, что если $a_1 = 1$, $a_n = 1/2(a_{n-1} + 2/a_{n-1})$ при $n = 2, \ldots, 10$, то $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-370}$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастет.

Реш **4**.

З-ча **5**. Докажите, что система неравенств

$$\begin{cases} |x| & > & |y-z+t|, \\ |y| & > & |x-z+t|, \\ |z| & > & |x-y+t|, \\ |t| & > & |x-y+z|. \end{cases}$$

не имеет решений.

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. На листе бумаги отмечены точки A, B, C, D. Распознающее устройство может абсолютно точно выполнять два типа операций: а) измерять в сантиметрах расстояние между двумя заданными точками; б) сравнивать два заданных числа. Какое наименьшее число операций нужно выполнить этому устройству, чтобы наверняка определить, является ли четырехугольник $ABCD$ прямоугольником?

Реш **1**.

З-ча **2**. Из точки M по плоскости с постоянной скоростью ползет муравей. Его путь представляет собой спираль, которая наматывается на точку O и гомотетична некоторой своей части относительно этой точки. Сможет ли муравей пройти весь свой путь за конечное время?

Реш **2**.

З-ча **3**. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x| & < & |y-z+t|, \\ |y| & < & |x-z+t|, \\ |z| & < & |x-y+t|, \\ |t| & < & |x-y+z|. \end{cases}$$

Реш **3**.

З-ча **4**. Произведение некоторых 48 натуральных чисел имеет ровно 10 различных простых делителей. Докажите, что произведение некоторых четырех из этих чисел является квадратом натурального числа.

Реш **4**.

З-ча **5**. На координатной плоскости нарисованы круги радиусом 1/14 с центрами в каждой точке, у которой обе координаты — целые числа. Докажите, что любая окружность радиусом 100 пересечет хотя бы один нарисованный круг.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. См. задачу 1 для 9 класса с заменой прямоугольника $ABCD$ квадратом.

Реш **1**.

З-ча **2**. Биссектриса угла A треугольника ABC продолжена до пересечения в D с описанной вокруг него окружностью. Докажите, что $AD > 1/2(AB + AC)$.

Реш **2**.

З-ча **3**. Решите уравнение $x^{x^4} = 4$ $(x > 0)$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Докажите, что ни для каких векторов a, b, c не могут одновременно выполняться три неравенства

$$\sqrt{3}|a| < |b-c|,\ \sqrt{3}|b| < |c-a|,\ \sqrt{3}|c| < |a-b|$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Найдите минимум по всем α, β максимума функции

$$y(x) = |\cos x + \alpha\cos 2x + \beta\cos 3x|.$$

Реш **5**.

L олимпиада (1987)

7 класс

З-ча **1**. В марте 1987 года учитель решил провести 11 занятий математического кружка. Доказать, что если по субботам и воскресеньям кружок не проводить, то в марте найдутся три дня подряд, в течение которых не будет ни одного занятия кружка.

Реш **1**.

З-ча **2**. Доказать, что из любых 27 различных натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать два числа, не являющихся взаимно простыми.

Реш **2**.

З-ча **3**. По поляне, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 100 м, бегает волк. Охотник убивает волка, если стреляет в него с расстояния не более 30 м. Доказать, что охотник может убить волка, как бы быстро тот ни бегал.

Реш **3**.

З-ча **4**. Пусть AB — основание трапеции $ABCD$. Доказать, что если $AC + BC = AD + BD$, то трапеция $ABCD$ — равнобокая.

Реш **4**.

З-ча **5**. Али-Баба и 40 разбойников решили разделить клад из 1987 золотых монет следующим образом: первый разбойник делит весь клад на две части, затем второй разбойник делит одну из частей на две части и т.д. После 40-го деления первый разбойник выбирает наибольшую из частей, затем второй разбойник выбирает наибольшую из оставшихся частей и т.д. Последняя, 41-я часть достается Али-Бабе. Для каждого из 40 разбойников определить, какое наибольшее количество монет он может себе обеспечить при таком дележе независимо от действий других разбойников.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Доказать, что если $a > b > 0$ и $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$, то справедливо неравенство $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}$.

Реш **1**.

З-ча **2**. Школьник хочет вырезать из квадрата размером $2n \times 2n$ наибольшее количество прямоугольников размером $1 \times (n+1)$. Найти это количество для каждого натурального значения n.

Реш **2**.

З-ча **3**. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

Реш **3**.

З-ча **4**. В пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и D — прямые, $\angle BCA = \angle DCE$, а точка M — середина стороны AE. Доказать, что $MB = MD$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Можно ли выбрать некоторые натуральные числа так, чтобы при любом натуральном значении n хотя бы одно из чисел n, $n + 50$ было выбрано и хотя бы одно из чисел n, $n + 1987$ не было выбрано?

Реш **5**.

9 класс

З-ча **1**. Даны 7 различных цифр. Доказать, что для любого натурального числа n найдется пара данных цифр, сумма которых оканчивается той же цифрой, что и число.

Реш **1**.

З-ча **2**. По k вершинам правильного пятиугольника с помощью двусторонней линейки восстановить остальные вершины в случае: а)$k = 4$; б)$k = 3$. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)

Реш **2**.

З-ча **3**. Найти такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

Реш **3**.

З-ча **4**. Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_{1987}$ и положительных чисел $b_1, \ldots, b_{1987}$ справедливо неравенство

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_{1987})^2}{b_1 + \cdots + b_{1987}} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

Реш **4**.

З-ча **5**. Таня уронила мячик в огромный прямоугольный бассейн. Она хочет его достать с помощью 30 узких досок длиной 1 м каждая, построив из них мостики так, чтобы каждая доска опиралась концами на края бассейна или на уже положенные доски и чтобы в итоге одна из досок прошла над мячиком. Доказать, что Тане не удастся это сделать, если расстояния от краев бассейна до мячика превышают 2 м.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. а)Доказать, что из трех положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1$.

б)Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырех чисел?

Реш **1**.

З-ча **2**. Углы, образованные сторонами правильного треугольника с некоторой плоскостью, равны α, β и γ. Доказать, что одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

Реш **2**.

З-ча **3**. На клетчатой бумаге закрашены 17 единичных клеток. Доказать, что их можно покрыть прямоугольниками, сумма периметров которых не превосходит 100, причем расстояние между любыми точками разных прямоугольников не меньше $\sqrt{2}$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Можно ли разбить множество целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого значения n числа n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трем разным множествам?

Реш **4**.

З-ча **5**. В некотором царстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 ч вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю и т.д. Каждый житель до поступления указания находится в известном месте (у себя дома) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении (по прямой). Доказать, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.

Реш **5**.

LI олимпиада (1988)

7 класс

З-ча **1**. Докажите, что при простых $p > 7$ число $p^4 - 1$ делится на 240.

Реш **1**.

З-ча **2**. На серединах ребер AB и $B'C'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и P. Изобразите на грани $BCC'B'$ все точки, кратчайшие расстояния от которых по поверхности куба до точек M и P равны.

Реш **2**.

З-ча **3**. С помощью кронциркуля и линейки проведите через данную точку прямую, параллельную данной. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

Реш **3**.

З-ча **4**. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

Реш **4**.

8 класс

З-ча **1**. На строкой из четырех чисел 1, 9, 8, 8 проделаем следующую операцию: между каждыми двумя соседними числами впишем число, которое получится в результате вычитания левого числа из правого. Над новой строкой проделаем ту же операцию и т.д. Найдите сумму чисел строки, которая получится после ста таких операций.

Реш **1**.

З-ча **2**. Имеется линейка без делений и специальный инструмент, позволяющий замерять растояние между произвольными точками и откладывать это растояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша разделить пополам данный отрезок?

Реш **2**.

З-ча **3**. Докажите, что ни одна четверка натуральных чисел x, y, z, t не удовлетворяет равенству $3x^4 + 5y^4 + 7z^4 = 11t^4$.

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Известно, что настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Весы с одной чашкой показывают общий вес положенных на эту чашку монет. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать, чтобы наверняка определить, какие монеты являются фальшивыми, а какие — настоящими.

Реш **4**.

9 класс

З-ча **1**. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел не может оканчиваться на 1988.

Реш **1**.

З-ча **2**. Докажите, что при простых $p_i \geqslant 5$, $i = 1, 2, \ldots, 24$ число $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_{24}^2$ делится нацело на 24.

Реш **2**.

З-ча **3**. На плоскости даны две перпендикулярные прямые. С помощью кронциркуля укажите на плоскости три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

Реш **3**.

З-ча **4**. Пусть x и y — натуральные числа. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}+y.$$

Докажите, что множеством значений $f(x,y)$ являются все натуральные числа, причем для любого натурального $i=f(x,y)$ числа x и y определяются однозначно.

Реш **4**.

З-ча **5**. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более трех проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Калькулятор выполняет пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Найдите формулу, по которой на этом калькуляторе можно определить наименьшее из двух произвольных чисел a и b.

Реш **1**.

З-ча **2**. Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y=2^x$?

Реш **2**.

З-ча **3**. Всякий ли параллелепипед можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился прямоугольник?

Реш **3**.

З-ча **4**. Имеется линейка без делений и эталон длины, позволяющий откладывать некоторое фиксированное растояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша провести какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой?

Реш **4**.

З-ча **5**. Возьмем пару натуральных чисел и разделим с остатком большее из них на меньшее (если числа равны, то также одно из них разделим на другое). Из полученных частного и остатка образуем новую пару чисел и проделаем с ней то же самое. Как только одно из чисел окажется равным нулю, прекратим вычисления. Доказать, что если начать с чисел, не превосходящих 1988, то более шести делений выполнить не удастся.

Реш **5**.

LII олимпиада (1989)

7 класс

З-ча **1**. Квадрат расчерчен на 16 равных клеток. Каждую из букв A, B, C, D расставьте в этих клетках по четыре раза таким образом, чтобы на любой горизонтали, любой вертикали и двух больших диагоналях не было одинаковых букв.

Реш **1**.

З-ча **2**. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно заданной прямой.

Реш **2**.

З-ча **3**. В темной комнате на полке в беспорядке лежат 4 пары носков двух разных размеров и двух разных цветов. Какое наименьшее число носков необходимо, не выходя из комнаты, переложить с полки в чемодан, чтобы в нем оказались две пары различного размера и цвета?

Реш **3**.

З-ча **4**. Турист выехал из турбазы на байдарке в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость реки 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист может отъехать от турбазы, если через каждые 30 минут гребли он 15 минут отдыхает, не причаливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха?

Реш **4**.

З-ча **5**. Найдите все натуральные числа x, удовлетворяющие условиям: произведение цифр числа x равно $44 \cdot x - 86868$, а сумма цифр является кубом натурального числа.

Реш **5**.

8 класс

З-ча **1**. Решите уравнение
$$(x^2 + x)^2 + \sqrt{x^2 - 1} = 0.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Часть клеток бесконечной клетчатой бумаги покрашена в красный цвет, остальные — в белый (не обязательно в шахматном порядке). По красным клеткам прыгает кузнечик, по белым — блоха, причем каждый прыжок может быть сделан на любое расстояние по вертикали или горизонтали. Докажите, что кузнечик и блоха могут оказаться рядом, сделав в общей сложности (в сумме) не более трех прыжков.

Реш **2**.

З-ча **3**. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), постройте перпендикуляр к данной прямой, проходящей через данную точку а) вне этой прямой; б) на ней.

Реш **3**.

З-ча **4**. Подмножество X множества «двузначных» чисел 00, 01, …, 98, 99 таково, что в любой бесконечной последовательности цифр найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

Реш **4**.

З-ча **5**. Докажите, что пионерский отряд всегда можно разбить на две команды так, чтобы общее число пар друзей, оказавшихся в одной и той же команде, было меньше числа пар друзей, оказавшихся в разных командах.

Реш **5**.

З-ча **6**. Все значения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ на отрезке $[0, 1]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a| + |b| + |c|$?

Реш **6**.

9 класс

З-ча **1**. В пространстве имеются четыре различные прямые, окрашенные в два цвета: две красные и две синие, причем любая красная прямая перпендикулярна любой синей прямой. Докажите, что либо красные, либо синие прямые параллельны.

Реш **1**.

З-ча **2**. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки M, K и L так, что прямая MK параллельна прямой AC и ML параллельна BC. При этом отрезок BL пересекает отрезок MK в точке P, а AK пересекает ML в точке Q. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны.

Реш **2**.

З-ча **3**. Известно, что числа $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ образуют геометрические прогрессии. Можно ли, зная лишь значения $A_1 + B_1$, $A_2 + B_2$, $A_3 + B_3$ и $A_4 + B_4$, определить $A_5 + B_5$?

Реш **3**.

З-ча **4**. Улицы некоторого города на плане представляются в виде квадрата, расчерченного на 25 равных клеток со стороной 1. В отмеченной на рисунке ??? точке находится снегоуборочная машина. Найдите длину кратчайшего маршрута объезда всех улиц, чтобы в конце работы машина вернулась в исходную точку.

Реш **4**.

З-ча **5**. Найдите все положительные числа $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, удовлетворяющие при всех $k = 1, 2, \ldots, 10$ условию $(A_1 + \cdots + A_k)(A_k + \cdots + A_{10}) = 1$.

Реш **5**.

10 класс

З-ча **1**. Решите уравнение

$$lg(x-2) = 2x - x^2 + 5.$$

Реш **1**.

З-ча **2**. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

Реш **2**.

З-ча **3**. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

Реш **3**.

З-ча **4**. Даны n различных натуральных чисел. Докажите, что некоторая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не больше ее разности, содержит ровно 3 или 4 данных числа, если а) $n = 5$, б) $n = 1989$.

Реш **4**.

З-ча **5**. Вычислите с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

Реш **5**.

З-ча **6**. На ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах с общей вершиной, проведена плоскость. Докажите, что если три из четырех проведенных плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость также его касается.

Реш **6**.